
Progetto CRESCO

Centro computazionale di RicErca sui Sistemi Complessi

SP IIL.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti

Deliverable 1

Report sul raffinamento del modello di telecomunicazioni

Unità operativa DIIMA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata
Università di Salerno



30/05/2007

Responsabile Unità Operativa
Prof. Ciro D'Apice

SOMMARIO

Introduzione	3
1 Modelli microscopici e modelli macroscopici	4
2 Modello fluidodinamico basato sulle leggi di conservazione	7
3 Stratificazione della rete Internet	12
4 Reti di telecomunicazioni con sorgenti e destinazioni.....	19
4.1 Definizioni di base	19
4.2 Dinamiche sulle linee.....	20
4.3 Confronto tra probabilità di perdita	23
4.3.1 Modello proporzionale – eccesso.....	23
4.3.2 Modelli con buffer capacità finita	25
4.4 Dinamiche sulla rete.....	28
4.5 Distribuzione di traffico alle giunzioni	32
4.6 Riemann solvers alle giunzioni	34
4.6.1 Algoritmo (RA1).....	35
4.6.2 Algoritmo (RA2).....	37
4.7 Stime sulla variazione della densità	40
Appendice A	43
Appendice B	50
Bibliografia	57

Introduzione

Le attività previste dal Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata dell'Università di Salerno nell'ambito del progetto Cresco, inquadrato nel **SP III.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti**, hanno riguardato il raffinamento di un modello fluidodinamico basato sulle leggi di conservazione, punto di partenza per lo studio di schemi numerici e la loro implementazione al fine di simulare una rete di telecomunicazioni ed eseguire uno studio di ottimizzazione della qualità dei servizi erogati dalla rete soggetta a guasti e/o attacchi deliberati a livello fisico. Tali attività si sono concluse con lo sviluppo di un modello che per ogni linea di trasmissione accoppia alla legge di conservazione per la densità dei pacchetti un'equazione semilineare che descrive la percentuale dei pacchetti che a partire da una data sorgente si dirigono verso un'assegnata destinazione.

Il documento è articolato in quattro parti. La prima introduce alcune considerazioni sui modelli microscopici e macroscopici per poi presentare brevemente nella sezione successiva il modello di partenza e il suo raffinamento. Il terzo capitolo analizza la stratificazione a livelli della rete Internet spiegando come il modello sia in grado di descrivere al livello di trasporto di tale rete applicazioni che utilizzano il protocollo TCP. La quarta ed ultima componente del documento, invece, riporta una descrizione rigorosa analitica del modello e dei risultati ottenuti.

1 Modelli microscopici e modelli macroscopici

Uno degli aspetti di maggior rilevanza nella modellazione di sistemi complessi e non è il livello di dettaglio cui si intende simulare la realtà d'interesse. Il problema è non banale ed una scelta errata della modalità adottata può portare a risultati inconsistenti, poco inerenti la struttura da modellare e, nel caso peggiore, a situazioni di stallo in cui il modello realizzato poco si adatta al sistema studiato dando vita a risultati in alcun modo performanti.

Nasce così l'esigenza di scegliere tra due differenti tipologie di approcci da seguire per la modellazione del caso di studio in essere: l'approccio microscopico oppure l'approccio macroscopico, che si basano su grandezze microscopiche e macroscopiche.

Le variabili microscopiche caratterizzano il flusso della singola particella. Alcune di esse sono dipendenti dal tempo: la posizione, la velocità, l'accelerazione, i distanziamenti spaziali e temporali. Altre sono costanti nel tempo: nel caso del traffico stradale la categoria del veicolo, le caratteristiche del veicolo quali la velocità e l'accelerazione massima, etc. La difficoltà di conoscere e di operare su un così elevato numero di dati ha portato ad approcci di tipo macroscopico, basati su variabili mediate.

La differenziazione fra variabili microscopiche e macroscopiche prevede analogamente una differenziazione fra modelli macroscopici e microscopici di simulazione in dipendenza del tipo di variabili rappresentative del flusso.

I modelli microscopici affrontano il problema macroscopico dello scorrere del traffico basandosi sul comportamento microscopico delle singole particelle, cioè considerano il moto delle singole particelle del sistema oggetto d'esame: veicoli in reti stradali, pacchetti in reti di telecomunicazioni, merci in catene di produzione, etc. Poiché i modelli microscopici prendono in considerazione la totalità delle variabili che concorrono nell'evoluzione del sistema stesso, è semplice intuire che, tale metodologia di modellazione, è adottabile per la simulazione di sistemi con un numero minimo di entità differenti il cui comportamento è regolato da una quantità limitata di eventi. Nella modellazione di realtà caratterizzate da molte entità anche eterogenee il cui stato è a loro volta funzione di un elevato numero di variabili a volte anche imprevedibili, qualsiasi sia la loro natura, è preferibile seguire un approccio macroscopico.

I modelli macroscopici studiano il flusso come quello di un fluido del quale una volta note le caratteristiche generali e le condizioni al contorno è possibile prevederne l'evoluzione con un procedimento simile a quello che si utilizza nella fluidodinamica.

Dunque i modelli macroscopici piuttosto che analizzare il comportamento delle singole particelle, considerano situazioni che scaturiscono dall'interazioni delle particelle, per cui non abbiamo

grandezze quali le particelle, ma flussi di particelle e si assume che densità, velocità e flusso abbiano una distribuzione continua.

L'approccio macroscopico garantisce di valutare l'evoluzione del sistema prendendo in considerazione una scala spaziale ampia, in tal modo è possibile analizzare la realtà da modellare a regime permettendo di considerare la stessa nel suo complesso evitando di gestire il singolo evento che caratterizza la specifica entità ma non lo stato complessivo del sistema di cui l'entità stessa fa parte.

Un semplice esempio metterà ancor più in risalto le differenze tra i due approcci.

Si supponga di dover modellare il traffico di veicoli in una rete stradale.

Un approccio microscopico tenterà di modellare ogni singolo veicolo, sarà pertanto necessario gestire e valutare le eventuali interazioni con altre vetture, le caratteristiche della singola auto nonché le caratteristiche di guida di ogni singolo autista, bisognerebbe fare distinzione tra autisti uomini e autisti donne, autisti giovani o autisti anziani, tra vetture, con uno due o più passeggeri e così via. E' semplice notare che tale approccio difficilmente potrà modellare realisticamente un'intera rete stradale causa l'elevato numero di variabili che concorrono nella realtà da dover manipolare, inoltre, pur riuscendo in tale "impresa" e pur utilizzando i più potenti calcolatori attualmente presenti sul mercato, la complessità computazionale di tale approccio lo renderebbe inutilizzabile precludendo la possibilità di realizzare dimostratori capaci, a partire dal modello realizzato, di simulare il comportamento del sistema analizzato.

Un approccio macroscopico allo stesso problema, invece, utilizzerà variabili aggregate che conterranno informazioni relative le principali grandezze macroscopiche caratterizzanti il comportamento non più del singolo veicolo, ma di tutti i veicoli in circolo sulla strada. Nel caso specifico non si farà più riferimento alle tecniche di guida del singolo utente oppure alle caratteristiche specifiche delle singole auto ma, per esempio, al numero di auto presenti in una corsia nell'unità di spazio, nell'unità di tempo ed alla velocità media dei veicoli. Grandezze queste che, sotto opportune ipotesi proprie di ogni modello sia micro che macro, garantiranno la simulazione del traffico veicolare in una rete stradale anche di grosse dimensioni con un notevole numero di strade ed incroci ad un costo computazionale limitato permettendo pertanto la realizzazione di utili dimostratori capaci di codificare i risultati numerici ottenuti dal modello in informazioni comprensibili a qualsiasi tipologia di utente utilizzatore.

Ovviamente è valido anche il viceversa. L'approccio macroscopico per la modellazione di sistemi la cui evoluzione è caratterizzata da entità o eventi che richiedono una elevata precisione potrebbe portare alla realizzazione di un modello grossolano i cui risultati andrebbero ad essere troppo

distanti dalla realtà considerata e del tutto inattendibili perdendo l'accuratezza necessaria per la simulazione del sistema.

Si supponga per esempio di dover modellare le interazioni tra atomi e molecole che sono alla base del comportamento di tutta la materia vivente e inerte. In questo contesto è sicuramente sensato seguire un approccio microscopico capace di cogliere nel dettaglio i particolari che causano l'evoluzione del sistema e non certamente un approccio macroscopico in cui risulterebbe difficile modellare anche la singola entità a causa delle differenti scale spazio tempo tra le componenti che caratterizzano la realtà da modellare ed il livello di dettaglio specifico dell'approccio.

Si deve pertanto accettare un compromesso fra accuratezza e complessità computazionale. In questo modo, nel caso in cui si abbiano molte entità e variabili da manipolare, è preferibile utilizzare un modello macroscopico che dà una descrizione media del problema rendendolo computazionalmente trattabile mentre, se il numero di entità in gioco è limitato o comunque caratterizzato da eventi che richiedono un elevato grado di precisione per la manipolazione, è possibile ricorrere alla soluzione opposta. In entrambi i casi si è però di fronte a modelli parametrici ed è quindi necessaria una fase di identificazione ed una successiva validazione prima della reale utilizzazione dei sistemi considerati.

Questo richiede inevitabilmente di avere a disposizione dei dati reali raccolti sul campo o dei valori ottenuti da studi statistici estremamente vicini ad essi e di utilizzarli per validare il prototipo.

Il modello da noi proposto è di tipo macroscopico, in particolare è basato sulla legge di conservazione per la densità dei pacchetti e consente la simulazione delle informazioni in una rete di telecomunicazione indipendentemente dal numero di nodi che la compongono o dalla topologia che la contraddistingue. Naturalmente poiché alla base del modello vi è la conservazione dei pacchetti esso potrà descrivere l'evoluzione della densità di pacchetti in applicazioni che garantiscono una perdita non definitiva degli stessi.

Si osservi che un approccio microscopico potrebbe essere adottato qualora si decidesse di modellare il comportamento di un singolo nodo o comunque di un numero di nodi molto limitato, ma questo non rientra nelle specifiche delle attività che andremo a realizzare né tanto meno negli obiettivi fissatici i quali si riferiscono alla modellazione delle informazioni in intere reti di telecomunicazione, anche complesse, prendendo come esempio la rete Internet composta da svariati nodi e svariate linee di comunicazione.

2 Modello fluidodinamico basato sulle leggi di conservazione

L'approccio fluidodinamico ai problemi di traffico è stato introdotto per i flussi stradali a partire dai lavori degli anni 50 di Lighthill, Whitham e Richards (modello LWR). L'idea di base è quella di guardare a scale spaziali grandi in modo tale da considerare le automobili come piccole particelle e di assumere la conservazione della densità. Negli ultimi anni si è assistito ad una vera e propria rinascita di tale approccio. La ragione di questo rinnovato successo risiede nello studio teorico che è stato fatto per eliminare una serie di incongruenze della teoria classica, e rendere questi modelli da una parte sempre più aderenti alla complessità dei problemi trattati, sviluppando la descrizione di strade a più corsie, possibilmente con semafori; dall'altra si è assistito ad un notevole ampliamento dei campi di applicazione che vanno dalla modellazione di catene di produzione, a quella di canali di irrigazione, di reti di telecomunicazioni, all'analisi dei flussi sanguigni, etc.

I principali vantaggi dell'approccio fluidodinamico, rispetto a quelli esistenti, sono i seguenti:

- I modelli fluidodinamici sono completamente evolutivi, perciò sono in grado di descrivere le situazioni di traffico di una rete in ogni istante temporale, superando le difficoltà incontrate da molti modelli statici.
- E' possibile un'accurata descrizione della formazione delle code e della loro evoluzione sulla rete.
- La teoria permette lo sviluppo di efficienti schemi numerici anche per reti di grandi dimensioni. Ciò è possibile in quanto il traffico alle giunzioni è modellato in un modo semplice e computazionalmente conveniente, facendo uso di problemi di programmazione lineare.

Attualmente oltre al modello classico (LWR), si trovano modelli più complessi adatti a descrivere alcune caratteristiche dei flussi di traffico, come la formazione di code su autostrade anche in presenza di caselli o accessi dall'esterno. In particolare si segnalano i modelli proposti da Aw e Rascle (per risolvere una nota incongruenza segnalata da un famoso lavoro di Daganzo), modelli di transizione di fase proposti da Colombo, e modelli con diffusione e rilassamento proposti da Helbing.

Dal punto di vista matematico, i modelli vengono espressi in modo naturale da equazioni o sistemi di leggi di conservazione iperboliche non lineari, le cui soluzioni sono in generale discontinue, e debbono quindi essere trattate nell'ambito delle soluzioni deboli entropiche. Questo quadro, da un lato risulta matematicamente difficile, dall'altro permette la modellizzazione di tipici

fenomeni come la formazione di code. Si nota che oltre le difficoltà analitiche, anche la parte numerica presenta dei problemi complicati.

Il primo lavoro che contenga risultati analitici significativi, in quanto tratta reti stradali è un lavoro di B. Piccoli (con M. Garavello e G. Coclite) che fornisce l'esistenza e unicità, con dipendenza continua dai dati iniziali, delle soluzioni a Variazione Totale limitata per reti di traffico a giunzioni semplici (due strade entranti e due uscenti) utilizzando un'opportuna versione dell'algoritmo di Wave Front – Tracking di Bressan e che descrive il flusso negli archi della rete con il modello scalare. In particolare il lavoro evidenzia le diverse possibilità di scelta modellistica, che deve essere legata alla fisica della rete in considerazione.

Idee mutate dal traffico stradale hanno portato alla modellazione di reti di telecomunicazioni, ed in particolare allo sviluppo di un modello fluidodinamico di rete tipo Internet ad opera di D'Apice, Manzo e Piccoli.

L'idea è di guardare alla rete in una scala temporale intermedia in modo tale che la trasmissione dei pacchetti avviene ad un livello più veloce ma gli equilibri della intera rete sono raggiunti solo asintoticamente. Ciò permette di costruire un modello che si basa su una descrizione macroscopica. Esistono diversi approcci per analizzare il flusso di traffico su reti di telecomunicazioni, in particolare per Internet che focalizzano in particolare su proprietà di algoritmi di controllo della congestione come il TCP/IP. Nel nostro modello piuttosto che occuparci di meccanismi di controllo abbiamo considerato un gran numero di nodi, che usano semplici algoritmi di instradamento e attraverso una procedura di limite abbiamo ottenuto un'equazione differenziale alle derivate parziali per la densità dei pacchetti sulla rete.

La rete viene descritta da un numero finito di linee di trasmissione modellate da intervalli $[a_i, b_i]$ (con uno dei due estremi possibilmente infinito) che si incontrano in qualche nodo (routers) che riceve e invia informazioni in forma di pacchetti. Ciascun pacchetto può essere visto come una particella sulla rete, ma bisogna tener conto di questioni specifiche di telecomunicazioni, ad esempio avendo in mente la rete Internet si assume che ciascun pacchetto viaggia sulla rete ad una fissata velocità e con un'assegnata destinazione finale e che i routers ricevono, processano e instradano i pacchetti che possono essere persi con una probabilità che aumenta all'aumentare dei pacchetti processati.

Dapprima abbiamo modellato il comportamento di una singola linea di trasmissione su cui ci sono più nodi consecutivi. Se si considerano due routers consecutivi, poichè ciascun router rimanda al nodo successivo i pacchetti persi fin quando non arriva ad esso il segnale di ricezione, si può assumere che in una scala temporale intermedia i pacchetti sono conservati. Passando poi a "backbones" della rete, che sono formati da molti router consecutivi, e guardando in una scala

spaziale larga, si arriva a considerare un modello consistente in una singola legge di conservazione, in cui la quantità conservata è la densità di pacchetto:

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0,$$

dove ρ è la densità dei pacchetti (numero di pacchetti per unità di spazio) ed $f = \rho v(\rho)$ è il flusso (numero di pacchetti per unità di tempo), con $v(\rho)$ velocità di trasmissione dei pacchetti.

Poiché la velocità su ciascuna linea è supposta costante, è possibile ricavare una velocità media di trasmissione tra i routers considerando la quantità di pacchetti che può essere persa. Assegnando una probabilità di perdita di pacchetto come funzione della densità, passando al limite nella procedura di invio e rinvio dei pacchetti si ottiene una funzione velocità e quindi una funzione flusso.

Si è supposta una funzione di probabilità di perdita di pacchetti del tipo:

$$p(\rho) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \frac{2(\rho - \sigma)}{\rho}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

dove $\rho_{\max}$ è la densità massima supportata da una linea, e σ è un valore soglia prefissato.

A partire da tale probabilità si è ricavata una velocità media di trasmissione

$$v(\rho) = \bar{v}(1 - p(\rho)) = \begin{cases} \bar{v}, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \bar{v} \frac{(2\sigma - \rho)}{\rho}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

e da qui la funzione flusso.

Poiché l'obiettivo è quello di modellare reti complesse è stata risolta la dinamica ai nodi in cui molte linee si intersecano. Il passo principale per la risoluzione del Problema di Cauchy ai nodi consiste nella risoluzione del problema di Riemann, problema di Cauchy con dati iniziali di tipo Heavy-side. Alle giunzioni i Problemi di Riemann sono sottodeterminati per cui sono stati introdotti ulteriori condizioni. Sono state considerati due algoritmi di instradamento dei pacchetti:

RA1: I pacchetti dalle linee entranti vanno su quelle uscenti in base alla destinazione finale.

RA2: I pacchetti dalle linee entranti vanno instradati su quelle uscenti al fine di massimizzare il numero di pacchetti sulle linee entranti ed uscenti.

Per ciascuno algoritmo è stato determinato un Riemann solver. La differenza principale nei due algoritmi è che mentre il primo è indifferente a possibili sovraccarichi della rete, e si comporta con abuso di notazione come uno “switch”, il secondo indirizza i pacchetti sulle linee uscenti tenendo in considerazione i carichi e dunque ridirezionando i pacchetti in modo tale da massimizzare il flusso sia sulle linee entranti che su quelle uscenti. Ancora con qualche abuso di notazione, potremmo dire che il secondo algoritmo si comporta come un “router”.

Si osserva che l'algoritmo RA1, già usato per il traffico stradale, prevede la definizione di una matrice di distribuzione del traffico che descrive la percentuale dei pacchetti che dalle linee entranti sono indirizzati sulle linee uscenti. Per l'esistenza delle soluzioni ai problemi di Cauchy ci si è ristretti al caso di nodi semplici con due linee entranti e due linee uscenti, ma a differenza del traffico stradale è stato ottenuto un bound preciso sulla variazione totale della densità, grazie ad alcune ipotesi sulla funzione flusso, ed è stato poi possibile derivare l'esistenza delle soluzioni ai problemi di Cauchy, attraverso il metodo del wave-front tracking. Non è stato invece possibile provare la dipendenza continua dai dati.

Per quanto riguarda il secondo algoritmo, non considerato per il traffico stradale in quanto il ridirezionamento non è previsto da un punto di vista modellistico (eccetto che in casi eccezionali, quali la chiusura di qualche strada), per avere unicità delle soluzioni ai Problemi di Riemann, sono stati introdotti parametri aggiuntivi, chiamati rispettivamente di priorità, che descrivono le priorità tra linee entranti e parametri di distribuzione che hanno lo stesso significato della matrice di distribuzione del traffico. Il vantaggio dell'algoritmo RA2 è che la variazione del flusso in un nodo è conservata per interazioni di onde provenienti da linee di trasmissione, il che permette di ottenere stime sulla variazione totale delle densità, e di costruire una soluzione entropica ai problemi di Cauchy. Inoltre, utilizzando le tecniche dei vettori tangenti, si è dimostrata l'unicità e la dipendenza Lipschitziana per soluzioni sull'intera rete. Questi ultimi risultati si differenziano da quelli ottenuti per il caso di traffico stradale. Il motivo principale risiede nella possibilità di re-indirizzamento che modella il comportamento di routing di certe reti di telecomunicazione. Il risultato di dipendenza continua dei dati mostra che la scelta di un algoritmo di tipo "router" implica la stabilità delle soluzioni, rispetto a perturbazioni dei dati, contro l'instabilità ottenuta con uno di tipo "switch".

A partire dal modello descritto, durante le attività previste per il progetto Cresco, si è proceduto ad un suo raffinamento del modello, introducendo sorgenti e destinazioni.

Infatti, uno dei drawbacks del modello descritto è che non considera il percorso globale dei pacchetti. Per esempio consideriamo una rete in cui alcuni nodi sono congestionati: se usiamo l'algoritmo RA2 che massimizza il flusso sulle linee entranti ed uscenti i pacchetti non sono instradati verso nodi congestionati, per cui potrebbero entrare in loops.

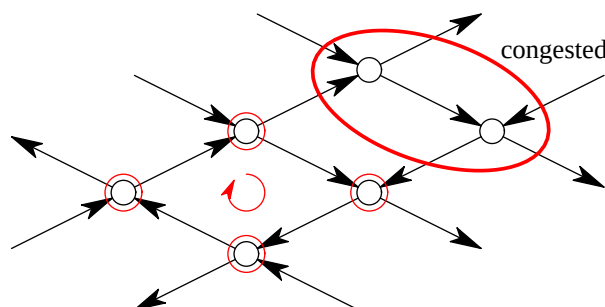


Figura 2.1.

Questi ultimi sono evitati se si considerano che i pacchetti originati da una sorgente e con un'assegnata destinazione hanno percorsi precisi all'interno della rete. Tali percorsi sono determinati dal comportamento alle giunzioni attraverso un vettore π che descrive su ciascuna linea di trasmissione la percentuale dei pacchetti che vanno da una fissata sorgente ad una fissata destinazione. L'evoluzione di π segue un'equazione semilineare

$$\pi_t + v(\rho)\pi_x = 0,$$

che viene accoppiata alla legge di conservazione.

Sono state considerate diverse funzioni di distribuzioni del traffico che descrivono diverse strategie di routing:

- Ad una giunzione il traffico iniziato da una sorgente s e con destinazione finale d , proveniente dalla linea di trasmissione i , viene instradato su un'assegnata linea j ;
- Ad una giunzione il traffico iniziato da una sorgente s e con destinazione finale d , proveniente dalla linea di trasmissione i , viene instradato su ogni linea (con coefficienti probabilistici) o su alcune di esse.

La prima funzione di distribuzione del traffico era già stata considerata per il traffico stradale, per cui ci siamo focalizzati sulla seconda, in particolare sono stati definiti due modi secondo cui il traffico viene instradato sulle linee uscenti.

Partendo da una funzione di distribuzione del traffico ed usando il vettore π , si è mostrato come calcolare la matrice di distribuzione del traffico. Sono stati descritti metodi per risolvere problemi di Riemann alle giunzioni assegnando diverse funzioni di distribuzione del traffico e gli algoritmi di instradamento RA1 e RA2. Il punto chiave per costruire una soluzione sull'intera rete, usando il metodo del wave-front tracking, è stato quello di derivare alcune stime BV sulle soluzioni approssimate costanti a tratti, per poter passare poi al limite. Nel caso in cui il traffico alle giunzioni è instradato sulle linee uscenti secondo alcuni coefficienti probabilistici, sono state ricavate stime sulla funzione di densità dei pacchetti per l'algoritmo RA2 per poter provare l'esistenza delle soluzioni del Problema di Cauchy.

3 Stratificazione della rete Internet

Come brevemente accennato nel paragrafo precedente il modello realizzato si propone di modellare il flusso di pacchetti in circolo lungo la rete Internet seguendo un approccio fluidodinamico.

L'immagine che segue mostra la stratificazione a livelli di tale rete:

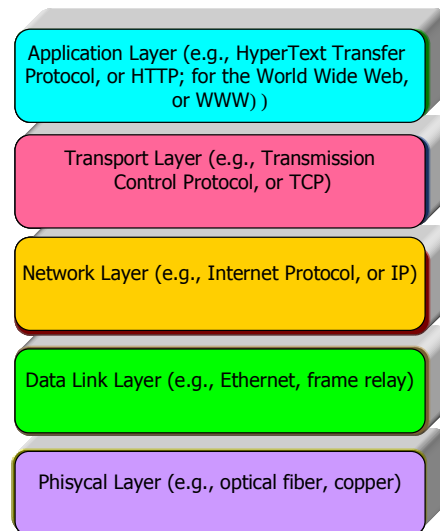


Figura 3.1.

Presentiamo brevemente i livelli mostrati in figura:

Application layer: è il livello più alto e consente all'utente di invocare i programmi applicativi che permettono di accedere ai servizi disponibili attraverso la rete. Tale livello gestisce l'interattività tra l'utente e la macchina. Il programma applicativo interagisce con uno dei protocolli di livello trasporto per inviare o ricevere dati passandoli al livello trasporto stesso nella forma richiesta.

Transport Layer: permette la connessione in rete fra due utenti ovvero la comunicazione tra un livello applicativo ed un altro accettando dati da molti utenti contemporaneamente e, viceversa, smistando i pacchetti che gli arrivano dai livelli inferiori ai vari specifici programmi. Il software di tale livello divide il flusso di dati in pacchetti (di solito di circa 500 byte) che vengono passati insieme all'indirizzo di destinazione allo strato sottostante. Il Transport Layer può regolare il flusso di informazioni e, utilizzando un protocollo sicuro come il TCP/IP (a differenza dell'UDP per esempio), fornire un trasporto affidabile assicurando che i dati giungano a destinazione senza errori ed in sequenza mediante un meccanismo di acknowledgement e ritrasmissione.

Network Layer: questo livello gestisce la comunicazione tra una macchina ed un'altra; accetta una richiesta di inoltro di un pacchetto dal transportation layer insieme all'identificazione della macchina alla quale il pacchetto deve essere inviato. Crea il datagram di base della rete formattando opportunamente il pacchetto ricevuto per poi trasferirlo in accordo alla sua destinazione senza garantire la correttezza della trasmissione. In tale fase oltre a svolgere la funzione di instradamento si verifica anche la validità dei pacchetti ricevuti.

Data link layer: è costituito da una interfaccia di rete che accetta il datagram IP e lo trasmette, previo incapsularlo in appositi frame sull'hardware di rete.

Physical layer: è il livello fisico della rete dove effettivamente avviene il trasferimento delle informazioni, costituito pertanto dal mezzo hardware utilizzato per il trasferimento dei pacchetti a seconda della tipologia di connessione utilizzata.

Affinché la dinamica dei pacchetti sulla rete possa essere descritta attraverso un modello fluidodinamico basato sulle leggi di conservazione, è necessario che i pacchetti in circolo lungo la rete si conservino. Dovremo quindi considerare comunicazioni affidabili in cui non si verifichino eventuali perdite di pacchetti.

Sulla base delle precisazioni esposte, il modello è utilizzabile a livello di trasporto in particolar modo in comunicazioni che fanno uso del protocollo TCP/IP, protocollo affidabile in quanto consente la ritrasmissione dei pacchetti persi, garantendo la conservazione delle informazioni che viaggiano sulla rete.

Consideriamo il seguente scenario:



Figura 3.2.

Supponiamo che un nodo Sender invii un pacchetto ad un nodo Receiver al tempo t utilizzando come protocollo di comunicazione il protocollo TCP/IP.

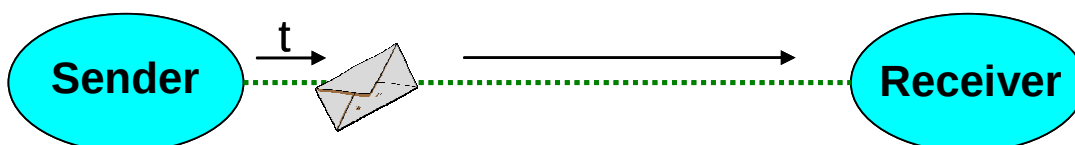


Figura 3.3.

Supponiamo che tale pacchetto venga perso durante il trasferimento.

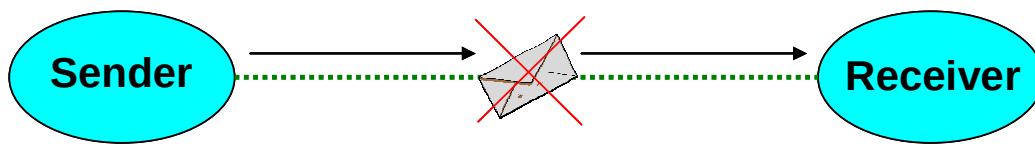


Figura 3.4.

Il protocollo TCP/IP provvede a rispedire lo stesso pacchetto al tempo $t + \Delta$.

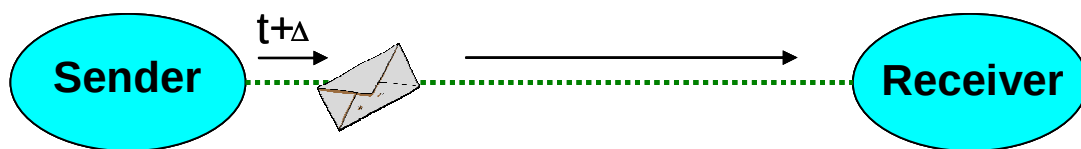


Figura 3.5.

Dal momento che la comunicazione tra i due nodi è affidabile, in quanto regolata dal protocollo TCP/IP, e dal momento che consideriamo l'evoluzione della rete a livello macroscopico è possibile affermare che sicuramente in un determinato istante di tempo il nodo Receiver riceverà il pacchetto trasmesso dal nodo Sender correttamente. Pertanto la perdita del pacchetto è solo temporanea, ma non definitiva.

Guardando la rete a livello microscopico, potrebbe accadere che la scala temporale considerata sia tale da non prendere in considerazione l'istante $t + \Delta$ in cui il pacchetto viene ritrasmesso, in questo caso si andrebbe erroneamente a pensare che il pacchetto trasmesso venga perso.

Quanto detto è estendibile a qualsiasi tipologia di rete, qualunque sia il carico su di essa e qualunque sia la corrispondente topologia. Osservando la rete a livello macroscopico e prendendo in considerazione comunicazioni affidabili, è semplice notare che i pacchetti in circolo lungo il sistema in esame si conservano.

In comunicazioni poco affidabili, come per esempio le videoconferenze, regolate da altri protocolli di comunicazione, nel caso specifico, il protocollo UDP, non sono presenti tecniche di ritrasmissione di pacchetto in presenza di perdite. In questo caso è possibile che alcuni pacchetti possano andare persi durante la comunicazione e, conseguentemente, non sarà possibile utilizzare il modello realizzato per la simulazione di queste tipologie di comunicazioni venendo a mancare la condizione necessaria per l'utilizzo dei principi fluidodinamici che, nel contesto in esame, è rappresentata dalla conservazione dei pacchetti.

A conferma di ciò che accade in comunicazioni affidabili monitorando la rete a livello macroscopico, si riportano di seguito i risultati reali ottenuti da un semplice esperimento nel quale si è osservata la trasmissione e ritrasmissione dei pacchetti tra due nodi la cui comunicazione è regolata dal protocollo TCP/IP.

Esempio di quantificazione delle ritrasmissioni di pacchetti in una connessione TCP

Scenario della prova

Trasferimento binario di un file di dimensioni pari a 1.282.048 byte tramite SFTP con il sistema che richiede il trasferimento (nel seguito A) connesso tramite LAN Modem ISDN collegato alla WAN tramite un canale B ISDN ed il sistema che invia il file (nel seguito B) connesso alla rete GARR.

Connessione fra i due sistemi:

Il percorso di instradamento dei pacchetti fra i due sistemi può essere visualizzato tramite l'output del comando *tracert* eseguito sul sistema A.

tracert 193.205.163.1

rilevazione instradamento verso bridge.diima.unisa.it [193.205.163.1]

su un massimo di 30 punti di passaggio:

```

1      2 ms  1 ms  1 ms  LANmodem [192.168.1.1]
2      55 ms 53 ms 53 ms x-nl1.opb.interbusiness.it [217.141.253.1]
3      48 ms 77 ms 47 ms 217.141.253.203
4      *      90 ms 53 ms r-rm198-nl11.opb.interbusiness.it [151.99.99.149]
5      58 ms 67 ms 57 ms r-rm197-vl3.opb.interbusiness.it [151.99.29.151]
6      54 ms 53 ms 53 ms gw-rm-nap2-r-rm156.opb.interbusiness.it [85.36.9.142]
7      94 ms 53 ms 53 ms garr2-nap.namex.it [193.201.29.15]
8      57 ms 53 ms 77 ms rt-rm2-rt-rm1-2.rm1.garr.net [193.206.134.117]
9      64 ms 53 ms 59 ms rt-rm1-rt-na1.na1.garr.net [193.206.134.245]
10     96 ms 59 ms 59 ms rt-na1-rc-sa.sa.garr.net [193.206.141.10]
11     60 ms 83 ms 59 ms mobilsal.unisa.it [193.205.170.245]
12     64 ms 59 ms 59 ms ing-cs.unisa.it [193.205.189.3]
13     66 ms 65 ms 66 ms bridge.diima.unisa.it [193.205.163.1]

```

Rilevazione completata.

Dati di riepilogo della connessione

Indirizzo A	Porta A	Indirizzo B	Porta B	Pacchetti TOT.	Byte	Pacchetti A->B	Byte A->B	Packets A<-B	Bytes A<-B
192.168.1.2	1083	193.205.163.1	22	1894	1438238	925	70502	969	1367736

Numero di pacchetti di informazione ritrasmessi da B: 75

Durata della connessione: 233 secondi

Percentuale relativa di pacchetti temporaneamente persi¹: $75/969 = 7,7 \%$

Percentuale assoluta di pacchetti temporaneamente persi²: $75/1894 = 4,0 \%$

Identificazione dello stato della rete

Per identificare lo stato della rete durante il trasferimento, si potrebbe utilizzare, quale parametro di carico medio, il valore dei byte trasferiti (convertiti in bit moltiplicando per 10 per tener conto dell'*overhead* introdotto dai protocolli di livello inferiore) nell'unità di tempo rapportato alla capacità massima nominale del canale trasmissivo. Quindi:

Capacità Nominale Massima del canale trasmissivo:	64kbps = 65536 bps
Velocità media di trasferimento da B ad A (in bps)	$1367736 * 10 / 233 = 58701 \text{ bps}$
Velocità media di trasferimento da A ad B (in bps)	$70502 * 10 / 233 = 3026 \text{ bps}$
Velocità media di trasferimento totale (in bps)	$(1367736 + 70502) * 10 / 233 = 61727 \text{ bps}$
Stima del carico di rete da B ad A	$58701 / 65536 = 89,6\%$
Stima del carico di rete da A a B	$3026 / 65536 = 4,6\%$
Stima del carico di rete medio	$61727 / 65536 = 94,2 \%$

Secondo esempio di quantificazione della perdita di pacchetti in una connessione TCP

Scenario della prova

Trasferimento binario di un file di dimensioni pari a 1.282.048 byte tramite SFTP con il sistema che richiede il trasferimento (nel seguito A) connesso tramite HDSL (con capacità nominale di 2 Mbps) ed il sistema che invia il file (nel seguito B) connesso alla rete GARR.

Connessione fra i due sistemi:

¹ È relativa ai soli pacchetti inviati da B (che è il sistema che ha ritrasmesso i 75 pacchetti).

² È relativa a tutti i pacchetti, sia quelli inviati da B sia quelli inviati da A.

Il percorso di instradamento dei pacchetti fra i due sistemi può essere visualizzato tramite l'output del comando *tracert* eseguito sul sistema B³.

tracert 151.4.23.199

```

1      gw-sa (193.205.163.252)                0.677 ms    0.503 ms    0.502 ms
2      campus-cs.unisa.it (193.205.189.1)      0.390 ms    0.324 ms    0.314 ms
3      ru-unisa-rc-sa.sa.garr.net (193.206.130.129) 1.328 ms    1.552 ms    1.044 ms
4      * rc-sa-rt-na1.na1.garr.net (193.206.141.9) 2.685 ms    2.597 ms
5      rt-na1-rt-rm1.rm1.garr.net (193.206.134.246) 5.590 ms    6.166 ms    6.661 ms
6      * * rt-rm1-rt-rm2-2.rm2.garr.net (193.206.134.118) 5.558 ms
7      * wind-nap.namex.it (193.201.28.11)      5.961 ms    6.192 ms
8      151.6.5.61 (151.6.5.61)                5.719 ms    6.252 ms    8.246 ms
9      151.6.5.97 (151.6.5.97)                12.524 ms   10.459 ms   10.845 ms
10     151.6.109.220 (151.6.109.220)           12.496 ms   *           11.691 ms
11     151.8.192.82 (151.8.192.82)            23.668 ms !X *           22.863 ms !X

```

Dati di riepilogo della connessione:

Indirizzo A	Porta A	Indirizzo B	Porta B	Pacchetti TOT.	Byte	Pacchetti A->B	Byte A->B	Packets A<-B	Bytes A<-B
151.4.23.199	1591	193.205.163.1	22	1435	1373810	539	35026	896	1338784

Numero di pacchetti di informazione ritrasmessi da B: 12

Durata della connessione: 13 secondi

Percentuale relativa di pacchetti temporaneamente persi⁴: 13/896 = **1,4 %**

Percentuale assoluta di pacchetti temporaneamente persi⁵: 13/1435 = **0,9 %**

Identificazione dello stato della rete

Per identificare lo stato della rete durante il trasferimento, si potrebbe utilizzare, quale parametro di carico medio, il valore dei byte trasferiti (convertiti in bit moltiplicando per 10 per tener conto

³ Per meri problemi di configurazione del router di connessione HDSL il traceroute è fatto nella direzione inversa rispetto al primo caso.

⁴ È relativa ai soli pacchetti inviati da B (che è il sistema che ha ritrasmesso i 12 pacchetti).

⁵ È relativa a tutti i pacchetti, sia quelli inviati da B sia quelli inviati da A.

dell'*overhead* introdotto dai protocolli di livello inferiore) nell'unità di tempo rapportato alla capacità massima nominale del canale trasmissivo. Quindi:

Capacità Nominale Massima del canale trasmissivo:	2Mbps = 2097152 bps
Velocità media di trasferimento da B ad A (in bps)	$1338784 * 10 / 13 = 1029834$ bps
Velocità media di trasferimento da A ad B (in bps)	$35026 * 10 / 13 = 26943$ bps
Velocità media di trasferimento totale (in bps)	$(1338784 + 35026) * 10 / 13 = 1056777$ bps
Stima del carico di rete da B ad A	$1029834 / 2097152 = 49,1\%$
Stima del carico di rete da A a B	$26943 / 2097152 = 1,3\%$
Stima del carico di rete medio	$1056777 / 2097152 = \mathbf{50,4\%}$

I dati riportati mostrano come prendendo in considerazione una comunicazioni tra due nodi appartenenti a domini diversi, la cui comunicazione è regolata dal protocollo TCP/IP e monitorando la rete durante l'intera durata della comunicazione, i pacchetti trasmessi dal nodo mittente sono tutti ricevuti dal nodo ricevente. Si sono riscontrate situazioni in cui alcuni pacchetti sono andati persi, in questo caso è stato possibile notare come il nodo mittente ha provveduto alla ritrasmissione degli stessi. Questa situazione è testimoniata dal maggior numero di pacchetti trasferiti dal nodo B (mittente) al nodo A (ricevente).

Per brevità di esposizione sono stati riportati i risultati globali della comunicazione senza far riferimento esplicito al singolo pacchetto perso o ritrasmesso.

Il semplice esperimento realizzato, ha confermato quanto detto nei punti precedenti, ovvero che in comunicazioni affidabili, regolate dal protocollo TCP/IP, considerando la rete a livello macroscopico può verificarsi una perdita temporanea di pacchetti di informazione ma non definitiva, garantendo pertanto la conservazione del numero degli stessi. E' quindi possibile concludere che, in tali condizioni, è ammissibile simulare l'evoluzione delle informazioni in una rete di telecomunicazione mediante un modello macroscopico basato su leggi di conservazione.

4 Reti di telecomunicazioni con sorgenti e destinazioni

In questo capitolo, si vuole introdurre il modello di reti di telecomunicazioni con sorgenti e destinazioni. Il capitolo è organizzato nel seguente modo: nel paragrafo 4.1, si daranno delle definizioni di base; nel paragrafo 4.2, si discuterà delle dinamiche relative alle linee di trasmissione; nel paragrafo 4.3, si effettuerà un confronto tra la probabilità di perdita di pacchetti, ipotizzata dal modello, e alcuni modelli noti nella letteratura scientifica; nel paragrafo 4.4, si descriveranno i fenomeni associati alle dinamiche dei pacchetti sulla rete; nel paragrafo 4.5, si discuterà delle funzioni di tipo – traffico, che formalizzano i concetti matematici associati allo smistamento dei pacchetti sulle linee uscenti; nel paragrafo 4.6, si descriveranno i Riemann Solver che costruiscono le soluzioni sulle linee entranti ed uscenti da un determinato nodo della rete; nel paragrafo 4.7, si daranno dei cenni sulle stime della variazione totale della densità dei pacchetti, utili per la definizione del problema di Cauchy.

4.1 Definizioni di base

Consideriamo una rete di telecomunicazioni, che è una collezione finita di linee di trasmissione unite da nodi, alcuni dei quali sono sorgenti e destinazioni. Formalmente, introduciamo la seguente definizione:

Definizione. Una rete di telecomunicazioni è data da una 7 - tupla $(\mathbf{N}, \mathbf{I}, \mathbf{F}, \mathbf{J}, \mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{R})$ dove

- $\mathbf{N}$ è la cardinalità della rete, ovvero il numero di linee della rete;
- $\mathbf{I}$ è la collezione delle linee, modellate da intervalli $I_i = [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$;
- $\mathbf{F}$ è la collezione delle funzioni flusso $f_i : [0, \rho_i^{\max}] \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$;
- $\mathbf{J}$ è una collezione di sottoinsiemi di $\{\pm 1, \dots, \pm N\}$ che rappresentano i nodi. Se $j \in J \in \mathbf{J}$, allora la linea di trasmissione $I_{|j|}$ è una linea entrante per la giunzione J (al punto b_i) se $j > 0$ ed è una linea uscente (al punto a_i) se $j < 0$. Per ogni giunzione $J \in \mathbf{J}$, indichiamo con $\text{Inc}(J)$ l'insieme delle linee entranti, che sono le linee I_i tali che $i \in J$ e $i > 0$, mentre con $\text{Out}(J)$ l'insieme delle linee uscenti, che sono le linee I_i tali che $-i \in J$ e $i > 0$.
Assumiamo che ogni linea sia entrante per almeno un nodo e uscente per almeno un nodo;
- $\mathbf{S}$ è il sottoinsieme di $\{1, \dots, N\}$ che rappresenta le linee che cominciano da sorgenti di traffico. Quindi, $j \in \mathbf{S}$ se e solo se j non è uscente per qualche nodo. Assumiamo che $\mathbf{S} \neq \emptyset$;
- $\mathbf{D}$ è il sottoinsieme di $\{1, \dots, N\}$ che rappresenta le linee che portano alle destinazioni di

traffico. Così, $j \in \mathbf{D}$ se e solo se j non è entrante per qualche nodo. Assumiamo che $\mathbf{D} \neq \emptyset$;

- $\mathbf{R}$ è una collezione finita di funzioni r_j . Per ogni J , $r_j(i, s, d)$ indica la direzione di uscita del traffico che, cominciato alla sorgente s , ha d come destinazione finale, e che ha raggiunto J dalla strada entrante i (considereremo anche il caso in cui r_j è a più valori).

Di solito, si assume che la rete sia connessa. Comunque, questo non è strettamente necessario per sviluppare la nostra teoria.

4.2 Dinamiche sulle linee

Seguendo [9], facciamo riferimento al modello usato per definire le dinamiche delle densità dei pacchetti lungo le linee. Si fanno le seguenti ipotesi:

(H1) le linee sono composte da processori consecutivi N_k , che ricevono e mandano pacchetti. Il numero dei pacchetti a N_k viene indicato con $R_k \in [0, R_{\max}]$;

(H2) esistono due scale temporali: Δt_0 , che rappresenta il tempo di viaggio fisico di un singolo pacchetto da un nodo ad un altro (assunta l'indipendenza dal nodo per semplicità); T , che rappresenta il tempo di processamento, durante il quale ogni processore cerca di effettuare la trasmissione di un dato pacchetto;

(H3) ogni processore N_k cerca di spedire tutti i pacchetti R_k allo stesso tempo. I pacchetti vengono persi secondo una funzione di probabilità $p : [0, R_{\max}] \rightarrow [0, 1]$, determinata a R_{k+1} , e i pacchetti persi vengono rispediti ancora in un intervallo temporale di ampiezza T .

Lo scopo è determinare i flussi sulla rete. Dal momento che la velocità di trasmissione di pacchetto sulla linea può essere assunta costante, è possibile calcolare una funzione di velocità media e quindi una funzione di flusso medio.

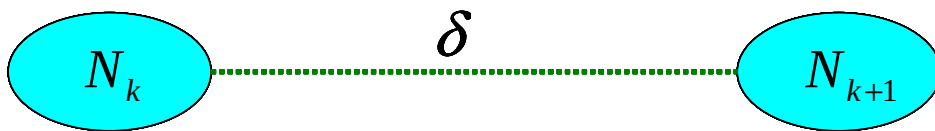


Figura 4.1.

Focalizziamo l'attenzione su due nodi consecutivi, N_k e N_{k+1} , assumiamo una situazione statica, per esempio R_k e R_{k+1} sono costanti, e sia δ la distanza tra i nodi. Durante un intervallo di processamento pari a T , accadono i seguenti fenomeni. Tutti i pacchetti R_k vengono spediti una prima volta: $(1 - p(R_{k+1}))R_k$ sono spediti con successo e $p(R_{k+1})R_k$ vengono persi. Al secondo

tentativo, dei pacchetti persi $p(R_{k+1})R_k$, $(1-p(R_{k+1}))p(R_{k+1})R_k$ vengono spediti con successo e $p^2(R_{k+1})R_k$ vengono persi, e così via.

Indichiamo con Δt_{av} la velocità di trasmissione media dei pacchetti, con $\bar{v} = \frac{\delta}{\Delta t_0}$ la velocità dei pacchetti senza perdite e con $v = \frac{\delta}{\Delta t_{av}}$ la velocità media dei pacchetti. Allora, possiamo calcolare:

$$\Delta t_{av} = \sum_{n=1}^M n \Delta t_0 (1-p(R_{k+1})) p^{n-1}(R_{k+1}),$$

dove $M = [T / \Delta t_0]$ (qui $[\cdot]$ indica la funzione parte intera superiore) rappresenta il numero di tentativi associati all'invio di un pacchetto. Facciamo la seguente assunzione:

(H4) Il numero di pacchetti non trasmessi per un intero slot temporale è trascurabile.

Tale ipotesi corrisponde ad assumere che $\Delta t_0 \ll T$ o, equivalentemente, che $M \sim +\infty$. Per $M = +\infty$, consideriamo:

$$\Delta t_{av} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \Delta t_0 (1-p(R_{k+1})) p^{n-1}(R_{k+1}) = \frac{\Delta t_0}{1-p(R_{k+1})},$$

e

$$v = \frac{\delta}{\Delta t_{av}} = \frac{\delta}{\Delta t_0} (1-p(R_{k+1})) = \bar{v} (1-p(R_{k+1})). \quad (1)$$

Sia ora ρ la densità media e $\rho_{\max}$ il suo massimo. Possiamo interpretare la funzione p come funzione di ρ e, usando l'espressione (1), determinare la corrispondente funzione di flusso, data dal prodotto tra la densità media e il flusso medio. È ragionevole assumere che la funzione relativa alla probabilità di perdita sia zero per intervalli che si trovano vicini allo zero. Questo significa che, a basse densità, non si ha perdita di pacchetto. Allora, p dovrebbe aumentare raggiungendo il valore 1 in corrispondenza della massima densità, situazione corrispondente ad una linea bloccata. Una possibile scelta per la funzione di flusso è la seguente:

$$p(\rho) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \frac{\rho_{\max}(\rho - \sigma)}{\rho(\rho_{\max} - \sigma)}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

e segue che

$$f(\rho) = \begin{cases} \bar{v} \rho, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \frac{\bar{v} \sigma (\rho_{\max} - \rho)}{\rho_{\max} - \sigma}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}. \end{cases} \quad (2)$$

Ponendo, per semplicità, $\rho_{\max} = 1$ e $\sigma = \frac{1}{2}$, consideriamo la semplice funzione “a tendina”.

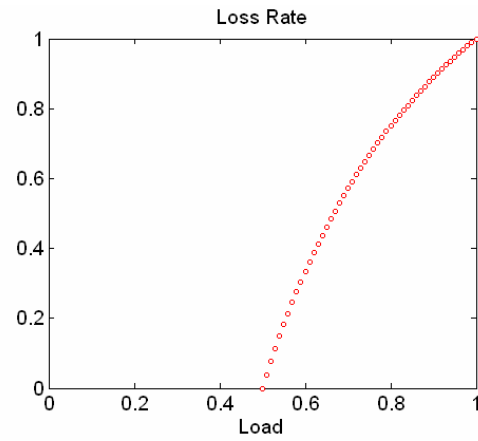


Figura 4.2: andamento della probabilità di perdita.

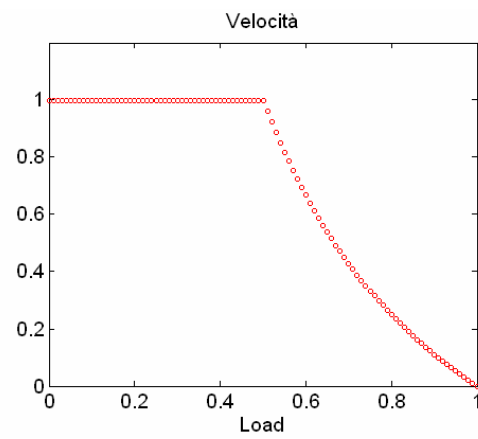


Figura 4.3: andamento della funzione velocità.

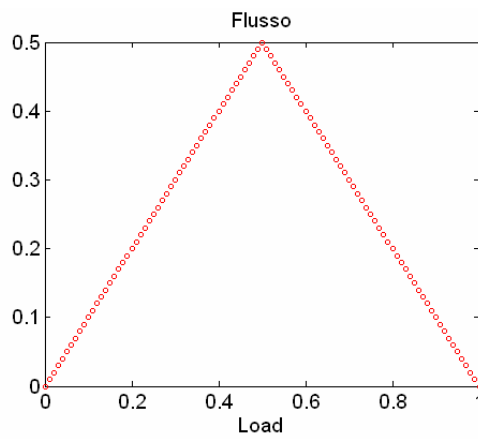


Figura 4.4: andamento della funzione flusso (a tendina).

Al fine di semplificare ulteriormente la trattazione delle leggi di conservazione, assumiamo le seguenti ipotesi:

- (F)** Mediante la posizione $\rho_{\max} = 1$, su ogni linea il flusso $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è concavo, $f(0) = f(1) = 0$, ed esiste un unico punto di massimo $\sigma \in]0, 1[$.

Si noti che il flusso di figura 4.3 o, più generalmente, il flusso dato dalla (2), soddisfa l'assunzione (F).

4.3 Confronto tra probabilità di perdita

Poichè la probabilità di perdita temporanea dei pacchetti è alla base del modello proposto, al fine di verificare se le assunzioni fatte trovano un riscontro concreto nella realtà, di seguito si è posto a confronto la probabilità di perdita utilizzata nel modello con l'andamento della probabilità di perdita che contraddistingue sistemi più o meno complessi, valutata usando diversi modelli in grado di descrivere la trasmissione tra un sender e un receiver.

4.3.1 Modello proporzionale – eccesso

Consideriamo la trasmissione tra due nodi consecutivi, il Sender ed il Receiver. Tra i due nodi è presente un link, la cui capacità è limitata. Un primo modello molto semplice, che possiamo considerare, prevede che il Sender e il Receiver siano sincronizzati, ovvero che il Receiver sia in grado di processare in tempo reale tutti pacchetti che gli arrivano dal Sender. In sostanza, stiamo assumendo che il Receiver non perda pacchetti. La perdita di pacchetti può avvenire solo sul link.

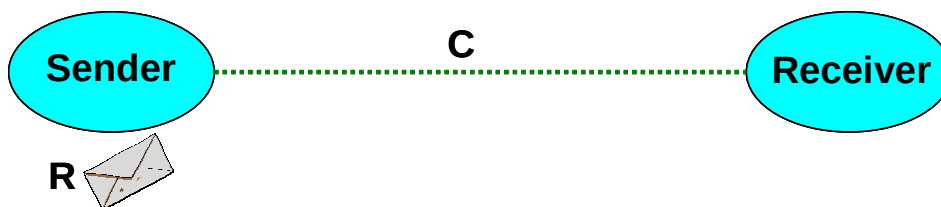


Figura 4.5.

In prima analisi possiamo dire che, se R è il tasso trasmissivo del sender e C è la capacità del link, si ha perdita solo se $R > C$. Il modello che stiamo proponendo è detto “proporzionale – eccesso” ed assume, arrivi deterministici. Il tasso di perdita dei pacchetti è regolato dalla seguente relazione:

$$p = \begin{cases} 0, & R < C, \\ \frac{R-C}{C}, & R > C. \end{cases}$$

Assumendo che $C = 0.5$, l'andamento di tale probabilità di perdita è il seguente:

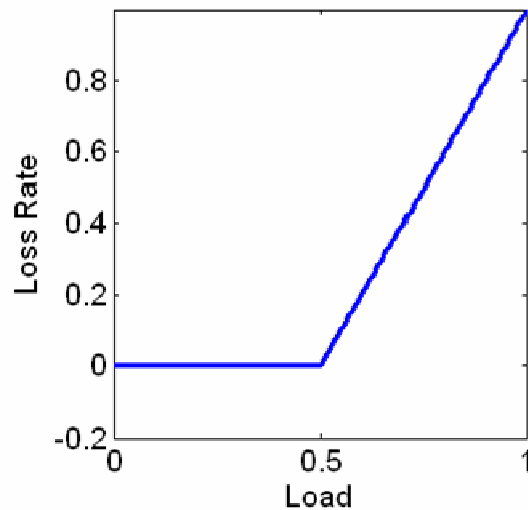


Figura 4.6.

E' possibile notare che quando il carico sulla rete è minore della capacità del link di comunicazione, non c'è perdita di pacchetti. Viceversa, se il carico supera la dimensione della capacità del link, la probabilità di perdita tende ad aumentare.

Nell'immagine che segue si mette a confronto la probabilità di perdita assunta nel modello realizzato con la probabilità di perdita caratterizzante il sistema presentato:

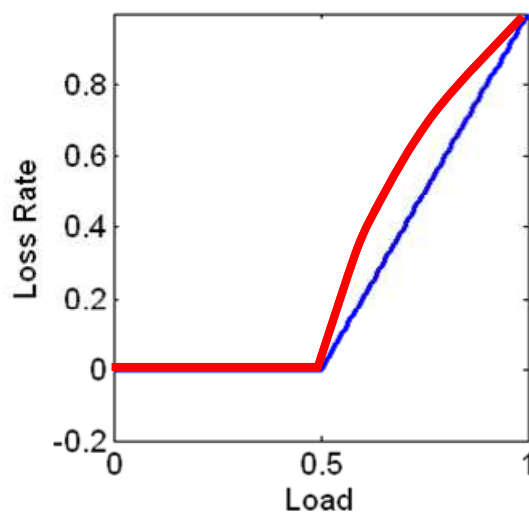


Figura 4.7.

Si può notare come, in caso di carico limitato sulla rete, le due probabilità coincidano mentre, con l'aumento del carico, la probabilità utilizzata nel modello (linea rossa) sovrastima quella del sistema considerato (linea blu).

Il sistema presentato è molto semplice e probabilmente poco significativo perché, nella realtà, difficilmente Sender e Reciver sono sincronizzati. Inoltre, solitamente il nodo che riceve i pacchetti

è dotato di un buffer di dimensione finita che memorizza gli stessi in attesa di essere processati e successivamente inviati. Consideriamo, pertanto, modelli che prevedono la presenza di buffer a capacità finita.

4.3.2 Modelli con buffer capacità finita

Facciamo riferimento allo scenario riportato in figura. Se il Sender ha una velocità troppo elevata, il Receiver non riesce a processare in tempo reale i pacchetti e li accumula in un buffer.



Figura 4.8.

Se non esiste un meccanismo di segnalazione tra i due router (nella realtà esiste) il Sender continua a inviare pacchetti e il buffer può riempirsi completamente, e si possono verificare fenomeni di rigetto dei nuovi pacchetti in arrivo.

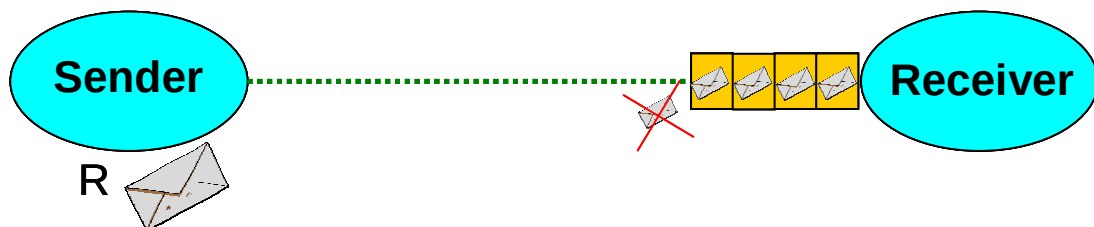


Figura 4.9.

In questo caso si tratta di una perdita solo temporanea. Il prossimo modello considerato suppone che il buffer abbia dimensione B . Assumiamo che i pacchetti abbiano la stessa lunghezza. E' possibile analizzare due casi, a seconda della distribuzione della dimensione del pacchetto: dimensione fissata (deterministica) e dimensione esponenziale. In entrambi i casi, si tratterà di calcolare la probabilità di perdita di pacchetti di un sistema a coda.

4.3.2.1 Dimensione fissa dei pacchetti

In uno scenario nel quale tutti i Sender usano la stessa dimensione dei pacchetti, il modello a coda $M/D/1/B$ è la scelta più naturale. La probabilità che il buffer sia pieno, e che quindi si abbia il rigetto di un pacchetto è pari a:

$$p = \frac{1 + (\rho - 1)\alpha_B(\rho)}{1 + \rho\alpha_B(\rho)},$$

dove

$$\alpha_B(\rho) = \sum_{k=0}^{B-2} \frac{e^{\rho(B-k-1)} (-1)^k (B-k-1)^k}{k!}, \quad B \geq 2.$$

L'andamento assunto dalla stessa è riportato di seguito:

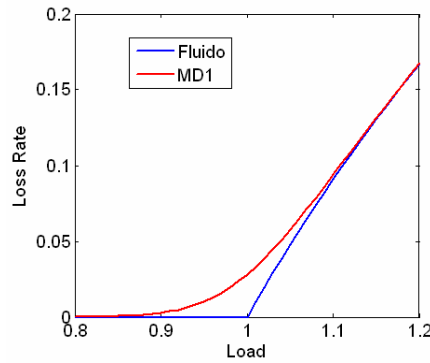


Figura 4.10.

La figura mostra un confronto tra il tasso di perdita proposto nel modello fluidodinamico e quello ottenuto risolvendo la coda $M/D/1/B$. E' possibile notare che le due probabilità di perdita considerate seguono fondamentalmente lo stesso andamento.

4.3.2.2 Dimensione dei pacchetti esponenzialmente distribuita

Esaminiamo il caso in cui la dimensione dei pacchetti è distribuita esponenzialmente (sistema a coda $M/M/1/B$). L'assunzione di distribuzione esponenziale è tanto più vera quanto più si guarda al traffico totale come somma di flussi di traffico provenienti da diverse sorgenti TCP. L'espressione della probabilità di perdita per tale tipo di sistema a coda è la seguente:

$$p = \frac{\rho^B (1 - \rho)}{1 - \rho^{B+1}},$$

che per $B \rightarrow \infty$, a meno di un fattore $\frac{1}{2}$, tende alla probabilità da noi ipotizzato.

L'immagine che segue mostra l'andamento di tale probabilità di perdita assumendo un buffer di dimensione $B = 30$:

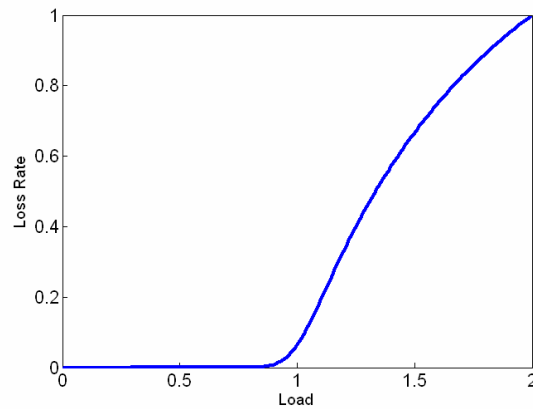


Figura 4.11.

E' interessante mettere a confronto, anche in questo caso, l'andamento della probabilità di perdita che caratterizza il sistema oggetto di studio in funzione di differenti valori del buffer di ricezione, con la probabilità di perdita assunta nel modello fluidodinamico.

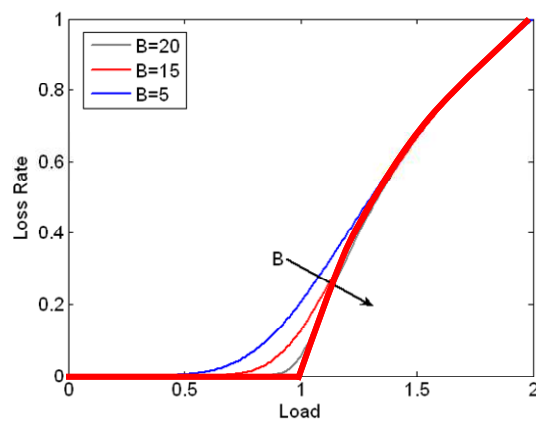


Figura 4.12.

Per valori del buffer $B = 5, 15, 20$, si noti come l'andamento della probabilità di perdita di tale sistema sia molto simile all'andamento della probabilità di perdita utilizzata nel modello. In particolar modo, quest'ultima rappresenta un caso limite della probabilità di perdita del sistema in questione.

Concludiamo la sezione considerando le probabilità di perdita di sistemi a coda di tipo diverso, alcuni dei quali modellano connessioni Sender – Receiver in presenza di traffico pesante, altri invece più adatti a descrivere situazioni di traffico leggero.

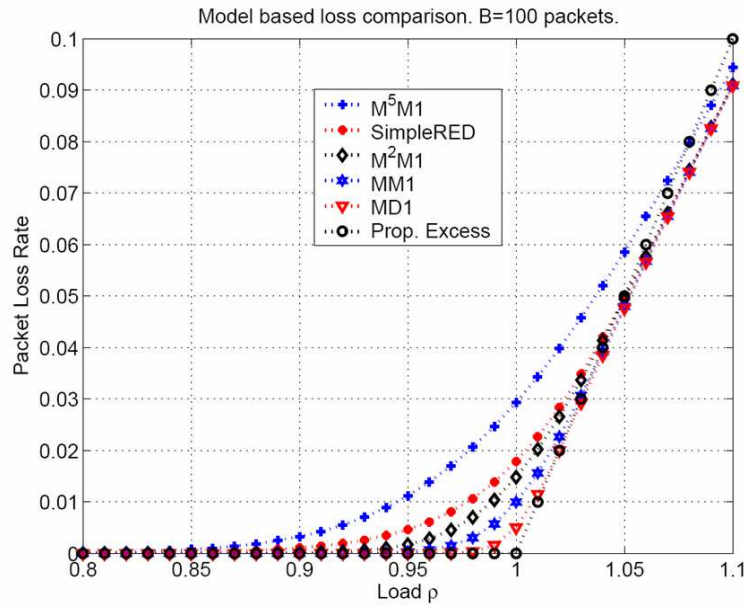


Figura 4.13.

Si può notare come l'andamento delle probabilità di perdita considerate sia pressoché identico per ogni sistema. Le principali differenze si presentano in corrispondenza di un carico sulla rete compreso nell'intervallo $0.9 < \text{Load} < 1$.

In funzione dei risultati presentati, è possibile concludere che l'assunzione fatta circa la probabilità di perdita considerata nel modello fluidodinamico è ragionevole e, soprattutto, riconducibile a casi reali anche differenti tra di loro.

4.4 Dinamiche sulla rete

Su ogni linea di trasmissione I_i , consideriamo l'equazione di evoluzione

$$\partial_t \rho_i + \partial_x f_i(\rho_i) = 0, \quad (3)$$

dove usiamo l'assunzione (F). Quindi, l'evoluzione del carico della rete viene descritta da un set finito di funzioni

$$\rho_i : [0, +\infty[\times I_i \mapsto [0, \rho_i^{\max}].$$

Su ogni linea di trasmissione I_i , vogliamo che ρ_i sia una soluzione debole entropica della (3), ovvero per ogni funzione test $\varphi : [0, +\infty[\times I_i \rightarrow \mathbb{R}$, regolare positiva e a supporto compatto su $]0, +\infty[\times]a_i, b_i[$, deve valere che

$$\int_0^{+\infty} \int_{a_i}^{b_i} \left(\rho_i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f_i(\rho_i) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = 0,$$

e per ogni $k \in R$ e ogni $\tilde{\varphi} : [0, +\infty[\times I_i \rightarrow R$, regolare positiva e a supporto compatto su $]0, +\infty[\times]a_i, b_i[$, deve valere che

$$\int_0^{+\infty} \int_{a_i}^{b_i} \left(|\rho_i - k| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \text{sgn}(\rho_i - k) (f_i(\rho_i) - f_i(k)) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) dx dt \geq 0.$$

Per ogni $i \in \mathbf{S}$ (risp. $i \in \mathbf{D}$), abbiamo bisogno di una funzione di inflow (risp. outflow), ovvero si considerano funzioni misurabili $\psi_i : [0, +\infty[\rightarrow [0, \rho_i^{\max}]$. Allora, le corrispondenti funzioni ρ_i devono verificare la condizione al bordo $\rho_i(t, a_i) = \psi_i(t)$ (risp. $\rho_i(t, b_i) = \psi_i(t)$) nel senso di [4].

Inoltre, per ogni linea I_i , definiamo una funzione tipo – traffico π_i , che misura la porzione di densità totale proveniente da ogni sorgente e che viaggia verso ogni destinazione:

Definizione. Una funzione tipo – traffico su una linea I_i è una funzione:

$$\pi_i : [0, \infty[\times [a_i, b_i] \times \mathbf{S} \times \mathbf{D} \mapsto [0, 1]$$

tale che, per ogni $t \in [0, \infty[$ e $x \in [a_i, b_i]$,

$$\sum_{s \in \mathbf{S}, d \in \mathbf{D}} \pi_i(t, x, s, d) = 1.$$

In altre parole, $\pi_i(t, x, s, d)$ specifica la frazione di densità $\rho_i(t, x)$ che ha avuto inizio dalla sorgente s e si sta propagando verso la destinazione finale d .

Abbiamo assunto, nel modello discreto, che ai nodi si utilizzi una politica FIFO. Di conseguenza, è naturale che la velocità media, ottenuta nella procedura di limite, risulta indipendente dalle sorgenti dei pacchetti e dalle loro destinazioni finali. In altre parole, facciamo la seguente ipotesi:

(H5) Su ogni linea I_i , la velocità media dei pacchetti dipende solo dal valore della densità ρ_i e non dai valori della funzione tipo – traffico π_i .

Come conseguenza dell'ipotesi (H5), abbiamo la seguente conclusione: se $x(t)$ indica una traiettoria di un pacchetto all'interno della linea I_i , otteniamo che:

$$\pi_i(t, x(t), s, d) = \text{const.} \quad (4)$$

Infatti, consideriamo i pacchetti che, al tempo t , sono in posizione $x(t)$. Tali pacchetti hanno la stessa velocità, per la (H5), così le loro traiettorie coincidono, indipendentemente dalle sorgenti e dalle destinazioni. In altre parole, al tempo $t' > t$, tutti i pacchetti saranno in posizione $x(t')$. Allora, le frazioni di densità, espresse da π , sono le stesse a $(t, x(t))$ e a $(t', x(t'))$. Considerando il differenziale totale rispetto al tempo della (4), deduciamo la seguente equazione semilineare:

$$\partial_t \pi_i(t, x, s, d) + \partial_x \pi_i(t, x, s, d) \cdot v_i(\rho_i(t, x)) = 0. \quad (5)$$

Questa equazione è accoppiata all'equazione (3) su ogni linea I_i . Più precisamente, l'equazione (5) dipende dalla soluzione della (3), mentre alle giunzioni il valore di π_i determinerà la distribuzione del traffico sulle linee uscenti, come spiegato in precedenza.

Per semplicità e senza perdita di generalità, assumiamo, d'ora in poi, che i flussi f_i siano uguali ed indicati da f . Quindi, il modello per una singola linea di trasmissione consiste di un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \rho_t + f(\rho)_x = 0, \\ \pi_t + \pi_x \cdot v(\rho) = 0. \end{cases}$$

Per trattare l'evoluzione alla giunzione, introduciamo alcune notazioni. Consideriamo una giunzione J con n linee di trasmissione entranti, indicate con $I_1, \dots, I_n$, e m linee di trasmissione uscenti, $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$. Una soluzione debole per J è una collezione di funzioni $\rho_l : [0, +\infty[\times I_l \rightarrow R$, $l = 1, \dots, n+m$, tali che

$$\sum_{l=1}^{n+m} \left(\int_0^{+\infty} \int_{a_l}^{b_l} \left(\rho_l \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + f(\rho_l) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x} \right) dx dt \right) = 0,$$

per ogni φ_l , $l = 1, \dots, n+m$, regolare e con supporto compatto in $]0, +\infty[\times]a_l, b_l]$ per $l = 1, \dots, n$ (linee di trasmissione entranti) e in $]0, +\infty[\times]a_l, b_l[$ per $l = n+1, \dots, n+m$ (linee di trasmissione uscenti), che sono anche regolari in corrispondenza della giunzione, ovvero:

$$\varphi_i(\cdot, b_i) = \varphi_j(\cdot, a_j), \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\cdot, b_i) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(\cdot, a_j), \quad i = 1, \dots, n, j = n+1, \dots, n+m.$$

Osservazione Sia $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m})$ una soluzione debole alla giunzione J tale che ogni $x \rightarrow \rho_i(t, x)$ abbia variazione limitata. Possiamo dedurre che ρ soddisfa la condizione di Rankine Hugoniot a J , ovvero che

$$\sum_{i=1}^n f(\rho_i(t, b_i-)) = \sum_{j=n+1}^{n+m} f(\rho_j(t, a_j+)),$$

per quasi ogni $t > 0$.

Per una legge di conservazione scalare, un problema di Riemann è un problema di Cauchy per un dato iniziale di tipo Heavyside, che è una funzione costante a tratti con una sola discontinuità. Si vogliono determinare soluzioni del tipo $\rho(t, x) = \phi(\frac{x}{t})$, formate da onde semplici, che sono il punto di partenza per costruire soluzioni al problema di Cauchy mediante l'algoritmo del wave – front

tracking. Queste soluzioni sono formate da onde continue, chiamate “rarefazioni”, e da discontinuità viaggianti, chiamate “shocks”. La velocità di tali onde è strettamente legata ai valori della funzione f' , come esposto in [5], [7], [18].

Analogamente, definiamo “problema di Riemann” per una giunzione il problema di Cauchy per dati iniziali $\rho_{1,0}, \dots, \rho_{n+m,0} \in [0,1]$ e $\pi_1^{s,d}, \dots, \pi_{n+m}^{s,d} \in [0,1]$ costanti per ogni linea di trasmissione.

Definizione. Un Riemann Solver (RS) per la giunzione J è una mappa che associa a dei dati di Riemann $\rho_0 = (\rho_{1,0}, \dots, \rho_{n+m,0})$ e $\Pi_0 = (\pi_{1,0}, \dots, \pi_{n+m,0})$ in J i vettori $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m})$ e $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_{n+m})$ tali che la soluzione su una linea di trasmissione entrante I_i , $i=1, \dots, n$, è data dall’onda $(\rho_{i,0}, \hat{\rho}_i)$, e su una linea uscente I_j , $j=n+1, \dots, n+m$, dalle onde $(\hat{\rho}_j, \rho_{j,0})$ e $(\hat{\pi}_j, \bar{\pi}_{j,0})$. Si richiede la condizione di consistenza:

$$RS(RS(\rho_0, \Pi_0)) = RS(\rho_0, \Pi_0).$$

Definiremo un RS alla giunzione nel seguito. Una volta che è stato scelto un Riemann solver ed è stata ottenuta la soluzione del problema di Riemann, possiamo definire delle soluzioni ammissibili alle giunzioni.

Definizione. Assumiamo che sia assegnato un Riemann solver RS. Sia $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m})$ tale che $\rho_i(t, \cdot)$ sia a variazione limitata per ogni $t \geq 0$. Allora, ρ è una soluzione debole ammissibile di (3) associata al RS alla giunzione J se e solo se valgono le seguenti proprietà:

(A) ρ è una soluzione debole alla giunzione J ;

(B) Π è una soluzione debole alla giunzione J ;

(C) per quasi ogni t , ponendo

$$\begin{aligned} \rho_J(t) &= (\rho_1(\cdot, b_1-), \dots, \rho_n(\cdot, b_n-), \rho_{n+1}(\cdot, a_{n+1}+), \dots, \rho_{n+m}(\cdot, a_{n+m}+)), \\ \Pi_J(t) &= (\pi_1(\cdot, b_1-), \dots, \pi_n(\cdot, b_n-), \pi_{n+1}(\cdot, a_{n+1}+), \dots, \pi_{n+m}(\cdot, a_{n+m}+)), \end{aligned}$$

abbiamo che

$$RS(\rho_J(t), \Pi_J(t)) = (\rho_J(t), \Pi_J(t)).$$

Data una rete ammissibile (vedi [11]), dobbiamo specificare come definire una soluzione.

Definizione. Si consideri una rete ammissibile $(\mathbf{N}, \mathbf{I}, \mathbf{F}, \mathbf{J}, \mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{R})$. Un set di condizioni iniziali e al bordo (brevemente IBC) è dato assegnando delle funzioni misurabili $\bar{\rho}_i : I_i \mapsto [0, \rho_i^{\max}]$, $\bar{\pi}_i : [a_i, b_i] \times \mathbf{S} \times \mathbf{D} \mapsto [0, 1]$, $i=1, \dots, N$ e delle funzioni misurabili

$\psi_i : [0, +\infty[\mapsto [0, \rho_i^{\max}]$, $i \in \mathbf{S} \cup \mathbf{D}$, e $\theta_{i,j} : [0, +\infty[\mapsto [0, 1]$, $i \in \mathbf{S}, j \in \mathbf{D}$ con la proprietà che $\sum_j \theta_{i,j}(t) = 1$.

Definizione. Si consideri una rete ammissibile $(\mathbf{N}, \mathbf{I}, \mathbf{F}, \mathbf{J}, \mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{R})$ e un set di IBC. Un set di funzioni $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)$ con $\rho_i : [0, +\infty[\times I_i \mapsto [0, \rho_i^{\max}]$ continue da $[0, +\infty[$ in L^1 , e $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ con $\pi_i : [0, +\infty[\times I_i \times \mathbf{S} \times \mathbf{D} \mapsto [0, 1]$, continue da $[0, +\infty[$ in L^1 , per ogni $s \in \mathbf{S}, d \in \mathbf{D}$, è una soluzione ammissibile se vale la seguente: ogni ρ_i è una soluzione debole entropica della (3) su I_i , $\rho_i(0, x) = \bar{\rho}_i(x)$ per quasi ogni $x \in [a_i, b_i]$, $\rho_i(t, a_i) = \psi_i(t)$ se $i \in \mathbf{S}$ e $\rho_i(t, b_i) = \psi_i(t)$ se $i \in \mathbf{D}$ nel senso di [4]. Ogni π_i è una soluzione debole dell'equazione (4), $\pi_i(0, x) = \bar{\pi}_i(x)$ per quasi ogni $x \in [a_i, b_i]$ e per ogni $i \in \mathbf{S} \quad j \in \mathbf{D}$, $\pi_i^{i,j}(t, a_i) = \theta_{i,j}$ nel senso di [4]. Infine, ad ogni giunzione, (ρ, Π) è una soluzione debole ed è una soluzione debole ammissibile nel caso di variazione limitata.

4.5 Distribuzione di traffico alle giunzioni

Si consideri una giunzione J in cui ci siano n linee di trasmissione con traffico entrante e m linee di trasmissione con traffico uscente. Indichiamo con $\rho_i(t, x)$, $i = 1, \dots, n$ e $\rho_j(t, x)$, $j = n+1, \dots, n+m$ le densità di traffico, rispettivamente, sulle linee di trasmissione entranti e su quelle uscenti, e con $(\rho_{1,0}, \dots, \rho_{n+m,0})$ il dato iniziale.

Definiamo $\gamma_i^{\max}$ e $\gamma_j^{\max}$ nel seguente modo:

$$\gamma_i^{\max} = \begin{cases} f(\rho_{i,0}), & \text{se } \rho_{i,0} \in [0, \sigma], \\ f(\sigma), & \text{se } \rho_{i,0} \in]\sigma, 1], \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

e

$$\gamma_j^{\max} = \begin{cases} f(\sigma), & \text{se } \rho_{j,0} \in [0, \sigma], \\ f(\rho_{j,0}), & \text{se } \rho_{j,0} \in]\sigma, 1], \end{cases} \quad j = n+1, \dots, n+m. \quad (7)$$

Le quantità $\gamma_i^{\max}$ e $\gamma_j^{\max}$ rappresentano il massimo flusso che può essere ottenuto da una singola onda soluzione su ciascuna linea di trasmissione. Infine, indichiamo con Ω_i e Ω_j le quantità:

$$\begin{aligned} \Omega_i &= [0, \gamma_i^{\max}], \quad i = 1, \dots, n, \\ \Omega_j &= [0, \gamma_j^{\max}], \quad j = n+1, \dots, n+m, \end{aligned}$$

e con $\hat{\gamma}_{inc}$ e $\hat{\gamma}_{out}$ le quantità $\hat{\gamma}_{inc} = (f(\hat{\rho}_1), \dots, f(\hat{\rho}_n))$, $\hat{\gamma}_{out} = (f(\hat{\rho}_{n+1}), \dots, f(\hat{\rho}_{n+m}))$, dove $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m})$ è la soluzione del problema di Riemann alla giunzione.

Discutiamo ora alcune possibili scelte per la funzione di distribuzione del traffico:

(A) $r_j : Inc(J) \times S \times D \rightarrow Out(J)$;

(B) $r_j : Inc(J) \times S \times D \hookrightarrow Out(J)$, ovvero r_j è una multifunzione.

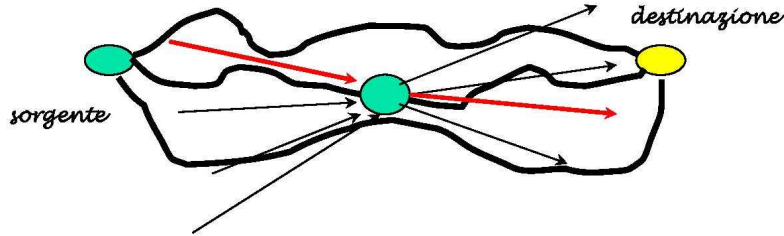


Figura 4.13: interpretazione grafica della funzione di distribuzione di traffico.

Se r_j è di tipo 1), allora ogni pacchetto ha un percorso deterministico, cioè alla giunzione J il traffico che è iniziato alla sorgente s e ha d come destinazione finale e che proviene dalla linea di trasmissione i , viene indirizzato verso un'assegnata linea j ($r_j(i, s, d) = j$).

Invece, se r_j è di tipo 2), alla giunzione J il traffico con sorgente s e destinazione d , proveniente da una linea i , viene indirizzato su ogni linea $I_j \in Out(J)$ o su qualche linea $I_j \in Out(J)$. Possiamo definire $r_j(i, s, d)$ in due diversi modi:

2a) $r_j : Inc(J) \times S \times D \rightarrow Out(J)$,

$r_j(i, s, d) \subseteq Out(J)$;

2b) $r_j : Inc(J) \times S \times D \hookrightarrow [0,1]^{Out(J)}$,

$$r_j(i, s, d) = (\alpha_J^{i,s,d,n+1}, \dots, \alpha_J^{i,s,d,n+m}) \text{ con } 0 \leq \alpha_J^{i,s,d,j} \leq 1, j \in \{n+1, \dots, n+m\}, \sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_J^{i,s,d,j} = 1.$$

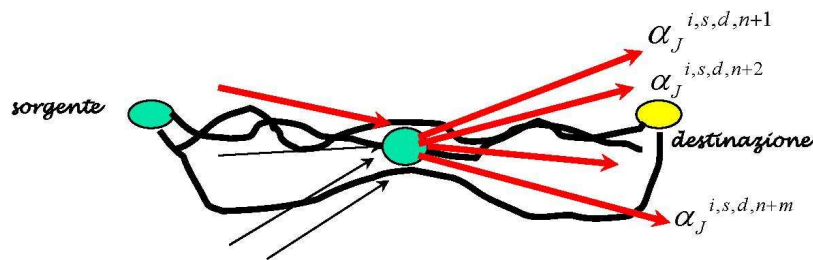


Figura 4.14: interpretazione grafica della funzione di distribuzione del tipo 2b).

Nel caso 2a), dobbiamo specificare in che modo il traffico alla giunzione J viene direzionato sulle linee di uscita.

La definizione 2b) significa che, alla giunzione J , il traffico con sorgente s e destinazione d , proveniente dalla linea I_i , viene indirizzato sulla linea di uscita j , $j = n+1, \dots, n+m$ con probabilità $\alpha_j^{i,s,d,j}$.

Definizione. Una matrice di distribuzione è una matrice

$$A \doteq \{\alpha_{j,i}\}_{j=n+1, \dots, n+m, i=1, \dots, n} \in R^{m \times n}$$

tale che

$$0 < \alpha_{j,i} < 1, \quad \sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{j,i} = 1,$$

per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = n+1, \dots, n+m$, dove $\alpha_{j,i}$ è la percentuale di pacchetti che arrivano dalla linea di trasmissione entrante i e che si dirigono verso la linea di trasmissione uscente j .

Affinché i flussi $f_i(\rho_i)$ siano consistenti con le funzioni tipo – traffico, devono soddisfare la seguente relazione:

$$f_j(\rho_j(\square, a_j +)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{j,i} f_i(\rho_i(\square, b_i -))$$

per ogni $j = n+1, \dots, n+m$.

Nel caso 2b), caso che sarà considerato nel simulatore, la matrice A è unica ed è definita come segue:

$$\alpha_{j,i} = \sum_{s \in \mathbf{S}, d \in \mathbf{D}} \pi_i(t, b_i -, s, d) \alpha_j^{i,s,d,j}.$$

4.6 Riemann solvers alle giunzioni

In questa sezione, definiamo le soluzioni dei problemi di Riemann alle giunzioni, dal momento che questo è il punto di partenza per costruire le soluzioni del problema di Cauchy mediante l'algoritmo del wave – front tracking.

Descriviamo due diversi Riemann solver alle giunzioni, che rappresentano due diversi algoritmi di smistamento:

(RA1) Assumiamo che:

(A) il traffico dalle linee di trasmissione entranti venga distribuito verso le linee di trasmissione uscenti in accordo a dei coefficienti fissati;

(B) nel rispetto della regola (A), il router sceglie di inoltrare i pacchetti in maniera tale da massimizzare il flusso (inteso come numero di pacchetti che devono essere processati).

(RA2) Assumiamo che il numero di pacchetti attraverso la giunzione venga massimizzato sia sulle linee entranti sia sulle linee uscenti.

Osservazione. Nel seguito, analizziamo il caso in cui le funzioni di distribuzione del traffico siano del tipo 2). Il caso 1) è stato considerato in [11] usando la seguente regola:

(RGP) Assumiamo che:

(A) il traffico dalle linee di trasmissione entranti viene distribuito sulle uscenti in accordo a dei coefficienti fissi;

(B) nel rispetto della regola (A), il router sceglie di smistare i pacchetti per massimizzare

$$c_2 \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i-)) - c_1 [dist((f_1(\rho_1(\cdot, b_1-)), \dots, f_n(\rho_n(\cdot, b_n-))), r)]^2$$

con la condizione che

$$f_j(\rho_j(\cdot, a_j+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{j,i} f_i(\rho_i(\cdot, b_i-)), \quad \forall j = n+1, \dots, n+m,$$

dove c_1 e c_2 sono costanti strettamente positive, e $dist(\cdot, r)$ indica la distanza euclidea in R^n dalla retta r , che è data da

$$\begin{cases} \gamma_2 = p_1 \gamma_1, \\ \vdots \\ \gamma_n = p_{n-1} \gamma_{n-1}, \end{cases}$$

e $(p_1, \dots, p_{n-1})$ determina un livello di priorità per le linee entranti alle giunzioni. Questa procedura di massimizzazione considera priorità su linee entranti e assicura la continuità delle soluzioni rispetto ai coefficienti π .

4.6.1 Algoritmo (RA1)

Illustriamo l'algoritmo solo per il caso 2b). Introduciamo alcune notazioni:

Definizione. Sia $\tau : [0,1] \rightarrow [0,1]$ la mappa tale che:

- $f(\tau(\rho)) = f(\rho)$ per ogni $\rho \in [0,1]$;
- $\tau(\rho) \neq \rho$ per ogni $\rho \in [0,1] \setminus \{\sigma\}$.

Chiaramente, τ è ben definito e soddisfa:

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho \leq \sigma &\Leftrightarrow \sigma \leq \tau(\rho) \leq 1, \\ \sigma \leq \rho \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \tau(\rho) \leq \sigma. \end{aligned}$$

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di R^n e, per ogni sottoinsieme $V \subset R^n$, sia $V^\perp$ il suo ortogonale. Si definisca, per ogni $i=1, \dots, n$, $H_i = \{e_i\}^\perp$, ovvero l'iperpiano ortogonale a e_i e, per ogni $j=n+1, \dots, n+m$, sia $\alpha_j = \{\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn}\} \in R^n$ e si definisca $H_j = \{\alpha_j\}^\perp$. Sia $\mathbf{K}$ il set di indici $k = (k_1, \dots, k_l)$, $1 \leq l \leq n-1$, tale che $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_l \leq n+m$ e per ogni $k \in \mathbf{K}$, sia $H_k = \bigcap_{h=1}^l H_{k_h}$.

Ponendo $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in R^n$, assumiamo che

(C) per ogni $k \in \mathbf{K}$, $\mathbf{1} \notin H_k^\perp$.

Nel caso 2b), sussiste il seguente risultato:

Teorema. (Teorema 3.1 in [6] and 3.2 in [11]). Sia $(\mathbf{N}, \mathbf{I}, \mathbf{F}, \mathbf{J}, \mathbf{S}, \mathbf{D}, \mathbf{R})$ una rete ammissibile e J una giunzione con n linee entranti e m linee uscenti. Si assuma che il flusso $f : [0,1] \rightarrow R$ soddisfi (F) e che la matrice A soddisfi la condizione (C). Per ogni $\rho_{1,0}, \dots, \rho_{n+m,0} \in [0,1]$, e per ogni $\pi_1^{s,d}, \dots, \pi_{n+m}^{s,d} \in [0,1]$, esistono densità $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n+m}$ e un'unica soluzione ammissibile centrata, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m})$, alla giunzione J , tale che:

$$\begin{aligned} \rho_1(0, \cdot) &\equiv \rho_{1,0}, \dots, \rho_{n+m}(0, \cdot) \equiv \rho_{n+m,0}, \\ \pi^1(0, \cdot, s, d) &= \pi_1^{s,d}, \dots, \pi^{n+m}(0, \cdot, s, d) = \pi_{n+m}^{s,d}, (s \in \mathbf{S}, d \in \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i &\in \begin{cases} \{\rho_{i,0}\} \cup [\tau(\rho_{i,0}), 1], & \text{se } 0 \leq \rho_{i,0} \leq \sigma, \\ [\sigma, 1], & \text{se } \sigma \leq \rho_{i,0} \leq 1, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \\ \hat{\rho}_j &\in \begin{cases} [0, \sigma], & \text{se } 0 \leq \rho_{j,0} \leq \sigma, \\ \{\rho_{j,0}\} \cup [0, \tau(\rho_{j,0})], & \text{se } \sigma \leq \rho_{j,0} \leq 1, \end{cases} \quad j = n+1, \dots, n+m, \end{aligned}$$

e su ogni linea entrante I_i , $i=1, \dots, n$, la soluzione consiste di una singola onda $(\rho_{i,0}, \hat{\rho}_i)$, mentre su ciascuna linea uscente I_j , $j=n+1, \dots, n+m$, la soluzione consiste della singola onda $(\hat{\rho}_j, \rho_{j,0})$.

Inoltre, $\hat{\pi}_i(t, \cdot, s, d) = \pi_i^{s,d}$ per ogni $t \geq 0, i \in \{1, \dots, n\}, s \in \mathbf{S}, d \in \mathbf{D}$ e

$$\hat{\pi}_j(t, a_j +, s, d) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_j^{i,s,d,j} \pi_i^{s,d}(t, b_i -, s, d) f(\hat{\rho}_i)}{f(\hat{\rho}_j)},$$

per ogni $t \geq 0, j \in \{n+1, \dots, n+m\}, s \in \mathbf{S}, d \in \mathbf{D}$.

4.6.2 Algoritmo (RA2)

Per risolvere il problema di Riemann in accordo all'algoritmo (RA2), abbiamo bisogno di alcuni parametri addizionali chiamati parametri di "priorità" e di "distribuzione del traffico". Per semplicità di esposizione, consideriamo prima una giunzione J in cui ci sono due linee di trasmissione con traffico entrante e due linee di trasmissione con traffico uscente. In tal caso, abbiamo solo un parametro di priorità $q \in]0, 1[$ ed un parametro di distribuzione del traffico $\alpha \in]0, 1[$. Denotiamo con $(\rho_{1,0}, \rho_{2,0}, \rho_{3,0}, \rho_{4,0})$ e $(\pi_{1,0}^{s,d}, \pi_{2,0}^{s,d}, \pi_{3,0}^{s,d}, \pi_{4,0}^{s,d})$ i dati iniziali.

Per massimizzare il numero di pacchetti che, attraverso una linea di trasmissione, entrano in una giunzione e da questa escono, definiamo

$$\Gamma = \min \{ \Gamma_{in}^{\max}, \Gamma_{out}^{\max} \},$$

dove $\Gamma_{in}^{\max} = \gamma_1^{\max} + \gamma_2^{\max}$ e $\Gamma_{out}^{\max} = \gamma_3^{\max} + \gamma_4^{\max}$. Dunque, vogliamo ottenere Γ come flusso attraverso la giunzione.

Si può facilmente notare che, per risolvere il problema di Riemann, basta determinare i flussi $\hat{\gamma}_i = f(\hat{\rho}_i)$, $i = 1, 2$. Infatti, per avere onde semplici con velocità appropriate, cioè negative sulle linee entranti e positive su quelle uscenti, assegniamo i vincoli (6), (7). Osserviamo che si può calcolare $\hat{\gamma}_i = f(\hat{\rho}_i)$, $i = 1, 2$ senza considerare il tipo di funzione di distribuzione del traffico.

Dobbiamo distinguere due casi:

- $\Gamma_{in}^{\max} = \Gamma$;
- $\Gamma_{in}^{\max} > \Gamma$.

Nel primo caso, scegliamo $\hat{\gamma}_i = \gamma_i^{\max}, i = 1, 2$.

Analizziamo il secondo caso, in cui usiamo il parametro di priorità q . Non tutti i pacchetti possono entrare nella giunzione, così sia C la quantità di pacchetti che può farlo. Dunque qC pacchetti provengono dalla prima linea entrante e $(1-q)C$ pacchetti dalla seconda.

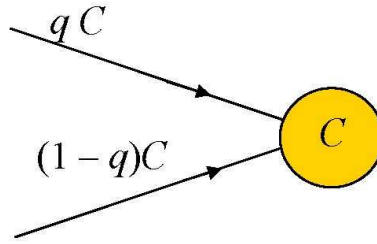


Figura 4.15: interpretazione del parametro di priorità.

Consideriamo lo spazio (γ_1, γ_2) e definiamo le seguenti rette:

$$r_q : \gamma_2 = \frac{1-q}{q} \gamma_1,$$

$$r_\Gamma : \gamma_1 + \gamma_2 = \Gamma.$$

Sia P il punto d'intersezione delle linee r_q e r_Γ . Ricordiamo che il flusso finale dovrebbe appartenere alla regione:

$$\Omega = \{(\gamma_1, \gamma_2) : 0 \leq \gamma_i \leq \gamma_i^{\max}, i=1, 2\}.$$

Distinguiamo due casi:

1a) P appartiene a Ω ;

2a) P non appartiene a Ω .

Nel primo caso, scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = P$, mentre, nel secondo caso, scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = Q = \text{proj}_{\Omega \cap r_\Gamma}(P)$, dove proj è la proiezione canonica su un insieme convesso.

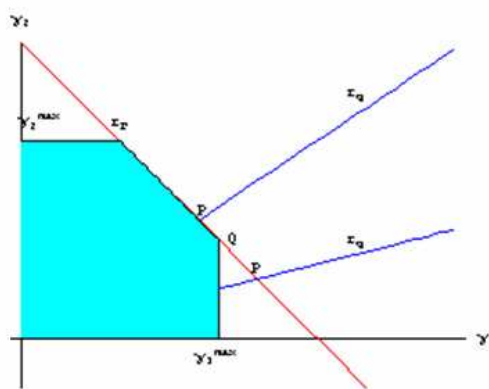


Figura 4.16: Riemann solver per il parametro di priorità.

Il ragionamento si può ripetere anche nel caso di n linee entranti. In R^n la retta r_q è data da

$$r_q = tv_q, \quad t \in R, \quad \text{con } v_q \in \Delta_{n-1} \text{ dove}$$

$$\Delta_{n-1} = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \gamma_i = 1 \right\}$$

è il semplice di dimensione $(n-1)$ e

$$H_\Gamma = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \sum_{i=1}^n \gamma_i = \Gamma \right\}$$

è un iperpiano dove $\Gamma = \min\{\sum_{in} \gamma_i^{\max}, \sum_{out} \gamma_j^{\max}\}$. Poiché $v_q \in \Delta_{n-1}$, allora esiste un unico punto $P = r_q \cap H_\Gamma$. Se $P \in \Omega$, scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) = P$. Se $P \notin \Omega$, allora scegliamo $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) = Q = \text{proj}_{\Omega \cap H_\Gamma}(P)$, la proiezione sull'insieme $\Omega \cap H_\Gamma$. Si osservi che la proiezione è unica poiché $\Omega \cap H_\Gamma$ è un sottoinsieme chiuso convesso di H_Γ .

Osservazione. Una possibile definizione alternativa nel caso $P \notin \Omega$ è scegliere $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n)$ come uno dei vertici di $\Omega \cap H_\Gamma$.

Come per l'algoritmo (RA1), $\hat{\pi}_i^{s,d} = \pi_{i,0}^{s,d}$, $i = 1, 2$.

Determiniamo, ora, $\hat{\gamma}_j$, $j = 3, 4$.

Come per le linee di trasmissione entranti, dobbiamo distinguere due casi:

- $\Gamma_{out}^{\max} = \Gamma$;
- $\Gamma_{out}^{\max} > \Gamma$.

Nel primo caso, $\hat{\gamma}_j = \gamma_j^{\max}$, $j = 3, 4$. Determiniamo $\hat{\gamma}_j$ nel secondo caso.

Riferiamoci ad α , il parametro di distribuzione del traffico. Poiché non tutti i pacchetti possono essere smistati sulle linee di trasmissione uscenti, sia C la quantità di pacchetti che può farlo. Dunque, αC pacchetti verranno instradati verso la linea uscente I_3 e $(1-\alpha)C$ verso la linea uscente I_4 . Si consideri lo spazio (γ_3, γ_4) e si definiscano le seguenti rette:

$$r_\alpha : \gamma_4 = \frac{1-\alpha}{\alpha} \gamma_3,$$

$$r_\Gamma : \gamma_3 + \gamma_4 = \Gamma.$$

La retta r_α può essere calcolata a partire dalla matrice A . Infatti, se assumiamo che la matrice di distribuzione del traffico A sia assegnata, allora calcoliamo $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$, e scegliamo $v_\alpha \in \Delta_{m-1}$ da

$$v_\alpha = \Delta_{m-1} \cap \{tA(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n) : t \in R\},$$

dove

$$\Delta_{m-1} = \left\{ (\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{m+n}) : \gamma_{n+i} \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \gamma_{n+i} = 1 \right\}$$

è il semplice $(m-1)$ dimensionale.

Se abbiamo una matrice A unica ed un unico vettore v_α , allora i flussi sulle linee uscenti vengono calcolati come nel caso senza sorgente e destinazione ([9]).

Distinguiamo due casi:

1b) P appartiene a Ω ;

2b) P non appartiene a Ω .

Nel primo caso, scegliamo $(\hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4) = P$, mentre nel secondo caso scegliamo $(\hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4) = Q$, dove $Q = \text{proj}_{\Omega_{adm}}(P)$. Possiamo estendere quanto detto al caso di m linee uscenti come per le linee entranti, definendo l'iperpiano $H_\Gamma = \{(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m}) : \sum_{j=n+1}^{n+m} \gamma_j = \Gamma\}$ e scegliendo un vettore $v_\alpha \in \Delta_{m-1}$.

Infine, definiamo $\hat{\pi}_i^{s,d}$, $j = 3, 4$:

$$\hat{\pi}_j(t, a_j +, s, d) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_j^{i,s,d,j} \pi_i^{s,d}(t, b_i -, s, d) f(\hat{\rho}_i)}{f(\hat{\rho}_j)},$$

per ogni $t \geq 0$, $j \in \{n+1, \dots, n+m\}$, $s \in \mathbf{S}$, $d \in \mathbf{D}$.

Osservazione. Osserviamo che nel caso dell'algoritmo (RA2) troviamo separatamente la soluzione per le linee entranti ed uscenti.

4.7 Stime sulla variazione della densità

In questa sezione, riportiamo alcuni risultati relativi alla variazione delle densità lungo una soluzione approssimata ottenuta col metodo del wave – front tracking (costruita come in [6]) per l'algoritmo (RA2) con la funzione di distribuzione del traffico di tipo 2b).

Lo scopo è dimostrare un risultato di esistenza per una soluzione (ρ, Π) nel caso di una piccola perturbazione dell'equilibrio $(\bar{\rho}, \bar{\Pi})$. Dobbiamo analizzare i seguenti tipi di interazione:

- I1) interazione di onde ρ con onde ρ sulle linee;
- I2) interazione di onde ρ con onde Π sulle linee;
- I3) interazione di onde Π con onde Π sulle linee;
- I4) interazione di onde ρ con le giunzioni;
- I5) interazione di onde Π con le giunzioni.

Si osservi che l'interazione di tipo I1 è classica e la variazione totale della densità decresce. L'interazione di tipo I3 non può avvenire, dal momento che le onde Π viaggiano con una velocità che dipende solo dal valore di ρ .

Interazione di tipo I2

I risultati sulle interazioni di tipo I2 sono riportati nella seguente proposizione:

Proposizione. *Un'interazione di un'onda ρ con un'onda Π può avvenire solo se l'onda Π interagisce da sinistra rispetto ad un'onda ρ . Se questo succede, allora l'onda ρ non cambia, mentre l'onda Π cambia solo la sua velocità.*

Interazione di tipo I4

In questo caso, è possibile dimostrare il seguente lemma:

Lemma. *Sia J una giunzione con al più due linee entranti e due linee uscenti. Si supponga che un'onda ρ , (ρ_1, ρ_{10}) , si avvicini alla giunzione J . Se esiste un $\delta > 0$ tale che $f(\rho_1) > \delta > 0$, $f(\rho_{10}) > \delta > 0$, allora esiste un $C > 0$ tale che la variazione delle funzioni tipo – traffico sulle linee uscenti risulta limitata da C volte la variazione del flusso dell'onda interagente, ovvero*

$$TV(\Pi)^+ \leq \frac{C}{\delta} TV(f)^-.$$

Interazione di tipo I5

Consideriamo interazioni di onde Π con le giunzioni. Dal momento che le onde Π hanno sempre velocità positiva, possono sempre interagire con la giunzione solo da una linea entrante.

In questo caso, sussistono i seguenti lemmi:

Lemma. *Si consideri una giunzione J e un'onda Π su una linea entrante I_i che interagisce con J . Se A è la matrice di distribuzione per J , l'interazione dell'onda Π con J modifica solo la colonna i – esima di A . Inoltre, la variazione della i – esima colonna risulta limitata dalla variazione dell'onda Π .*

Lemma. *Si consideri una giunzione J e un'onda Π su una linea entrante I_i che interagisce con J . Allora, esiste una $C > 0$, tale che la variazione dei flussi sia limitata da C volte la variazione dell'onda Π , cioè*

$$TV(f)^+ \leq CTV(\Pi)^-.$$

Appendice A

Leggi di conservazione

Concetti di base

Definizione 1. *Un sistema di leggi di conservazione in uno spazio mono dimensionale è un sistema della forma*

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + \partial_x f_1(u) = 0, \\ \vdots \\ \partial_t u_n + \partial_x f_n(u) = 0. \end{cases} \quad (1a)$$

Può essere scritto nella forma compatta come:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2a)$$

Dove $u = (u_1, \dots, u_n) : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ rappresenta la quantità conservata e $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il flusso.

Se integriamo la (2a) su un arbitrario intervallo spaziale $[a, b]$, allora

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(t, x) dx = - \int_a^b f(u(t, x))_x dx = f(u(t, a)) - f(u(t, b)).$$

In altre parole, la quantità u non si crea né si distrugge: la quantità u in ogni intervallo $[a, b]$ può cambiare solo per effetto della quantità u che entra e esce in corrispondenza di $x = a$ e $x = b$.

Osservazione 2. Il caso scalare. Se $n=1$, allora u ha valori in $\mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora, il sistema (1a) è rappresentato da un'unica equazione, e la (2a) è un'equazione scalare.

Assumiamo sempre che f sia regolare; in tal caso, se u è una funzione regolare, allora il sistema (1a) può essere riscritto nella forma quasi lineare:

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad (3a)$$

dove $A(u)$ rappresenta la matrice Jacobiana di ordine n dell'applicazione f in u .

Definizione 3. Il sistema (3a) è detto iperbolico se, per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, tutti gli autovalori della matrice $A(u)$ sono reali. Inoltre, il sistema (3a) viene detto “strettamente iperbolico” se è iperbolico e se, per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, gli autovalori della matrice $A(u)$ sono tutti distinti.

Le equazioni (2a) e (3a) sono completamente equivalenti per soluzioni regolari. Se, invece, u ha un salto, l'equazione quasi lineare (3a) non è in generale ben definita, dal momento che c'è il

prodotto di una funzione discontinua $A(u)$ con una derivata distribuzionale, che in questo caso è rappresentata da una funzione Delta di Dirac.

Soluzione debole

Una caratteristica dei sistemi non lineari della forma (2a) è che la soluzione del problema di Cauchy può sviluppare discontinuità in tempo finito, sebbene i dati iniziali siano regolari. Un esempio tipico è rappresentato dall'equazione di Burgers:

Esempio 5. Consideriamo la seguente legge di conservazione scalare (equazione di Burgers):

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0, \quad (4a)$$

con la condizione iniziale

$$u(0, x) = \bar{u}(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (5a)$$

Per t sufficientemente piccolo e positivo la soluzione può essere determinata con il metodo delle caratteristiche. Infatti, se u è regolare, la (4a) è equivalente a:

$$u_t + u u_x = 0,$$

da cui ricaviamo che la derivata direzionale della funzione $u = u(t, x)$ nella direzione $(1, u)$ si annulla. Perciò u deve essere costante lungo le rette caratteristiche nel piano $t - x$

$$t \rightarrow (t, x + t\bar{u}(x)) = (t, x + \frac{t}{1+x^2}).$$

Per $t < T = \frac{8}{\sqrt{27}}$, queste rette non si intersecano (vedi Figura 1a).

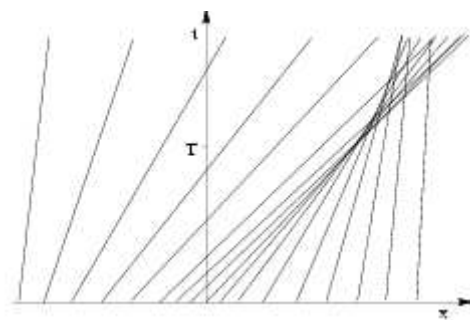


Figura 1a.

La soluzione del problema di Cauchy è perciò data implicitamente da:

$$u \left(t, x + \frac{t}{1+x^2} \right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Invece, per $t > \frac{8}{\sqrt{27}}$, le caratteristiche iniziano ad intersecarsi. Di conseguenza l'applicazione

$$x \rightarrow x + \frac{t}{1+x^2}$$

non è univoca e non definisce più una soluzione a un solo valore del problema di Cauchy. Al crescere del tempo, i punti sul grafico di $u(t, \cdot)$ si muovono orizzontalmente con velocità u , pari alla loro distanza dall'asse x . Ciò determina un cambiamento nel profilo della soluzione. Per t che tende al tempo critico, $T = \frac{8}{\sqrt{27}}$, si ha

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}} u_x(t, x) \right\} = -\infty,$$

e non esiste alcuna soluzione classica oltre il tempo T (vedi Figura 2a). La soluzione può essere prolungata per tutti i tempi $t \geq 0$ solo all'interno di una classe di funzioni discontinue.

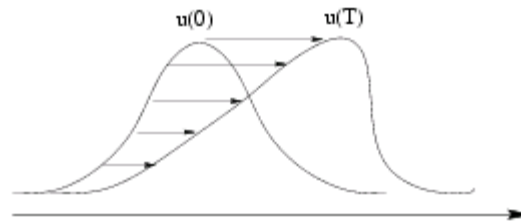


Figura 2a.

Questo semplice esempio mostra che, per ottenere un risultato di esistenza globale, è quindi necessario lavorare all'interno di una classe di funzioni discontinue, dando alla (2a) un'interpretazione distribuzionale.

Una funzione misurabile $u = u(t, x)$ da un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$ è una soluzione distribuzionale del sistema di leggi di conservazione (2a) se e solo se per ogni funzione $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con supporto compatto, si ha

$$\iint_{\Omega} \{u \phi_t + f(u) \phi_x\} dx dt = 0. \quad (6a)$$

Condizioni di Rankine-Hugoniot

Va osservato che il concetto di soluzione debole non permette di determinare un'unica soluzione del problema di Cauchy non appena sono presenti delle discontinuità. Per questo motivo bisogna imporre ulteriori condizioni che permettano di determinare l'unicità della soluzione. Deriviamo ora delle condizioni imposte dalla relazione (6a) su una soluzione del problema di Cauchy nei punti di salto.

Una funzione costante a tratti

$$U(t, x) = \begin{cases} u^+, & x > \lambda t, \\ u^-, & x < \lambda t, \end{cases} \quad (7a)$$

con $u^-, u^+ \in R^n$, $\lambda \in R$ rappresenta una soluzione debole se e solo se

$$\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-). \quad (8a)$$

La retta $x = \lambda t$ di discontinuità prende il nome di *shock* e λ rappresenta la velocità dello shock.

Condizioni di entropia

Nella presenza di discontinuità, le equazioni di Rankine-Hugoniot possono non essere sufficienti per individuare un'unica soluzione del problema di Cauchy. Per questo motivo, al fine di isolare un'unica soluzione, bisogna introdurre dei criteri, detti criteri di entropia, motivati da considerazioni di carattere fisico.

Condizione di ammissibilità (*Vanishing viscosity*)

Una soluzione debole del sistema (2a) è ammissibile se esiste una successione di soluzioni regolari u^ε di

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad (A = Df), \quad (9a)$$

che converge a u in L^1_{loc} per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Sfortunatamente, è difficile fornire stime uniformi sulle soluzioni del sistema parabolico (9a) e caratterizzare i limiti corrispondenti per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Comunque, da tale condizione è possibile dedurre altre condizioni che possono essere verificate molto più facilmente.

Condizione di ammissibilità (*Entropy inequality*)

Definizione 6. Una funzione continuamente differenziabile $\eta : R^n \rightarrow R$ è chiamata un'entropia per il sistema (2a) con flusso di entropia $q : R^n \rightarrow R$ se

$$D\eta(u) \cdot Df(u) = Dq(u), \quad u \in R^n. \quad (10a)$$

Definizione 7. Una funzione misurabile limitata u è una soluzione entropica di (2a) se

$$\int \int \{ |u - k| \varphi_t + \text{sgn}(u - k) (f(u) - f(k)) \varphi_x \} dx dt \geq 0 \quad (11a)$$

per ogni costante k ed ogni funzione C^1 $\varphi \geq 0$ con supporto compatto contenuto in $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Dalla (11a), possiamo derivare una semplice condizione geometrica, valida su ogni retta di discontinuità di u .

Poichè la velocità di uno shock, per le condizioni di Rankine – Hugoniot, è data dalla pendenza della retta secante al grafico di f per u^- e u^+ , si ha che:

Teorema 8. La funzione costante a tratti U definita in (7a) è una soluzione entropica di (8a) se e solo se le equazioni di Rankine-Hugoniot sono soddisfatte e per ogni $\alpha \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} f(\alpha u^+ + (1-\alpha)u^-) &\geq \alpha f(u^+) + (1-\alpha)f(u^-), \quad \text{se } u^- < u^+, \\ f(\alpha u^+ + (1-\alpha)u^-) &\leq \alpha f(u^+) + (1-\alpha)f(u^-), \quad \text{se } u^- > u^+. \end{aligned} \quad (12a)$$

La condizione (12a) ha una semplice interpretazione geometrica. Quando $u^- < u^+$, il grafico di f dovrebbe rimanere sopra la retta secante (Figura 3a). Quando $u^- > u^+$, il grafico dovrebbe rimanere sotto la retta secante (Figura 4a).

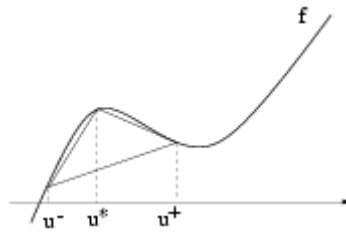


Figura 3a.

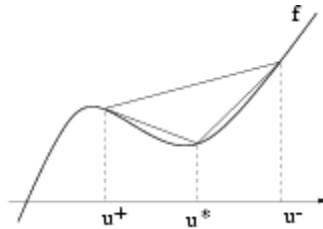


Figura 4a.

Condizione di ammissibilità (Lax Condition)

Una terza condizione di ammissibilità, dovuta a Lax, è particolarmente utile perchè può essere applicata ad un qualsiasi sistema di leggi di conservazione e ha un significato geometrico molto intuitivo. Osserviamo che riguarda solo l'ammissibilità degli shock. Nel caso scalare, se $x = \lambda t$ è lo shock, esso è ammissibile secondo Lax se

$$f'(u^-) \geq \lambda \geq f'(u^+),$$

ovvero:

- se $u^- < u^+$, lo shock è entropico se e solo se la funzione è concava tra u^- e u^+ , ovvero se e

solo se si tratta di uno shock in avanti;

- se $u^- > u^+$, lo shock è entropico se e solo se la funzione è convessa tra u^- e u^+ , ovvero se e solo se si tratta di uno shock all'indietro.

Il criterio di Lax afferma che le caratteristiche entrano nello shock.

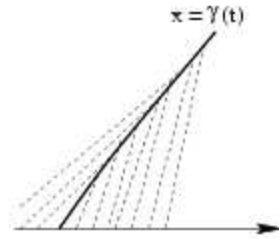


Figura 5a.

Il problema di Riemann

Il problema di Riemann per la legge di conservazione scalare (2a) consiste nel trovare una soluzione debole della (2a) che soddisfa la condizione di entropia con dati iniziali costanti a tratti della forma

$$u(0, x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0. \end{cases}$$

Supponiamo che f sia uniformemente convessa e che $G = (f')^{-1}$.

Teorema 9. (Soluzione del problema di Riemann)

- Se $u^- > u^+$, l'unica soluzione debole del problema di Riemann soddisfacente la condizione di entropia è

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & \frac{x}{t} < \lambda, \\ u^+, & \frac{x}{t} > \lambda, \end{cases}$$

dove

$$\lambda = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}.$$

- Se $u^- < u^+$, l'unica soluzione debole del problema di Riemann soddisfacente la condizione di entropia è

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-, & \frac{x}{t} < f'(u^-), \\ G(\frac{x}{t}), & f'(u^-) < \frac{x}{t} < f'(u^+), \\ u^+, & \frac{x}{t} > f'(u^+). \end{cases} \quad (13a)$$

Osservazione 10. Nel primo caso, gli stati u^- , u^+ sono separati da un'onda di shock con velocità costante λ . Nel secondo caso, sono separati da un'onda di rarefazione centrata. Il tutto è mostrato nelle figure 6a e 7a, rispettivamente.

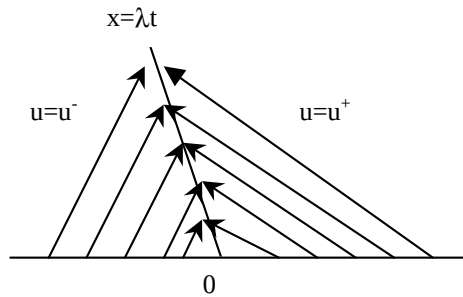


Figura 6a: shock.

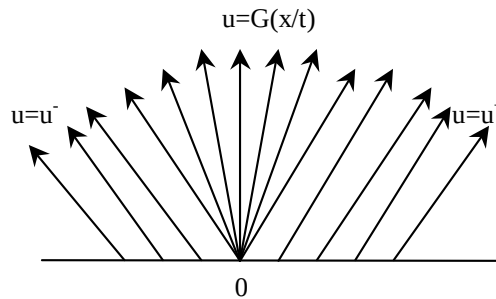


Figura 7a: rarefazione.

Il problema di Cauchy

Consideriamo il problema di Cauchy per una singola legge di conservazione:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (14a)$$

$$u(0, x) = \bar{u}(x), \quad (15a)$$

assumendo che $f : R \rightarrow R$ sia localmente Lipschitziana e che $\bar{u} \in L^1_{loc}$.

L'esistenza delle soluzioni è verificata mediante il metodo del *wave - front tracking* ([5]).

Appendice B

Modello LWR (Lighthill, Whitham, Richards)

Grandezze macroscopiche: velocità, flusso e densità

Velocità

Consideriamo un'automobile che si muove lungo una strada.

La velocità $v_i(t)$ di ciascuna automobile è data da

$$v_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt},$$

dove $x_i(t)$ denota la posizione dell'automobile al tempo t .

In molte situazioni, il numero di automobili è così elevato che risulta difficile tenere traccia di ciascuna di esse; di conseguenza, invece di misurare la velocità di ogni singola automobile si associa ad ogni punto nello spazio (in ogni istante) un'unica velocità, $v(x, t)$, chiamata campo velocità. Dunque, $v(x, t)$ è la velocità misurata al tempo t da un osservatore nella posizione x se vi è un'automobile in quella posizione in tale istante. In termini matematici:

$$v(x_i(t), t) = v_i(t).$$

L'esistenza di un campo velocità $v(x, t)$ implica che per ogni x e per ogni t vi sia una sola velocità. Questo modello di velocità non prevede il sorpasso delle automobili perché, nel punto di sorpasso, la velocità assumerebbe nello stesso istante valori diversi.

Flusso

Definiamo flusso di traffico il numero medio di automobili per ora (per corsia) misurato da un osservatore fisso in una certa posizione e lo indichiamo con f . Il flusso dipende ovviamente dalla posizione e dal tempo e dunque è una funzione di x e di t , $f(x, t)$.

La scelta dell'intervallo di tempo per la misurazione del flusso è fondamentale. Si assume che esista un intervallo di misurazione che sia:

- abbastanza lungo, in modo tale che durante tale intervallo passino per il punto di osservazione

molte automobili (eliminando così brusche fluttuazioni);

- abbastanza piccolo, in modo tale che le variazioni nel flusso di traffico non si smorzino calcolando la media su un periodo di tempo troppo lungo.

Densità

Definiamo densità di traffico ρ il numero di automobili per chilometro (per corsia). Naturalmente, tutti i veicoli vengono trattati allo stesso modo: la parola automobile è usata per rappresentare un qualsiasi veicolo.

Supponendo che tutti i veicoli abbiano lunghezza L e che la distanza tra due veicoli sia d , si ha che:

$$\rho = \frac{1}{L + d}.$$

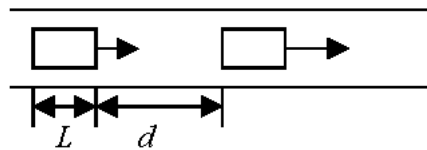


Figura 1b: la densità di traffico è l'inverso della spaziatura.

Anche per la densità, la lunghezza del tratto in cui contare le automobili deve essere scelta in modo tale da essere abbastanza grande da poter contenere un numero elevato di automobili e abbastanza piccola da non perdere densità locali (variazioni di densità).

Relazione tra flusso, densità e velocità

Esiste una relazione tra le grandezze velocità, flusso e densità. Consideriamo una delle più semplici situazioni di traffico. Supponiamo che, su una strada, il traffico si muova ad una velocità costante v_0 . Poiché ogni automobile si muove con la stessa velocità, la distanza tra i veicoli rimane costante e quindi la densità di traffico è anch'essa costante $\rho = \rho_0$.

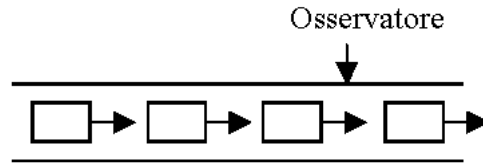


Figura 2b: flusso costante di automobili.

Calcoliamo il flusso di traffico. Essendo la velocità costante, la distanza percorsa è data dalla velocità per il tempo. In τ ore, ogni automobile ha percorso la distanza $v_0\tau$; per cui, il numero di automobili che l'osservatore vede passare in τ ore è dato dal numero di automobili nel tratto di lunghezza $v_0\tau$.

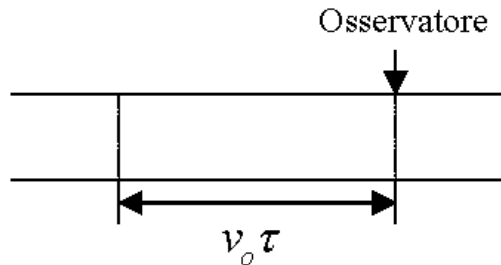


Figura 3b: distanza che un'automobile, che si muove a velocità costante v_0 , percorre in τ ore.

Poiché ρ_0 è il numero di automobili per chilometro, $\rho_0 v_0 \tau$ è il numero di automobili che l'osservatore vede passare in τ ore.

Il flusso di traffico è dato quindi da:

$$f = \rho_0 v_0.$$

Sebbene sia stata ricavata in un caso semplificato, in generale vale la legge fondamentale:

$$f(x, t) = \rho(x, t)v(x, t), \quad (1b)$$

che lega flusso, densità e velocità.

Conservazione del numero di automobili

Secondo l'approccio fluidodinamico ai problemi di traffico, si ipotizza che il flusso veicolare si comporti come un fluido continuo. Secondo tale approccio, oltre alla relazione $f = \rho v$ è valida la relazione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (2b)$$

che esprime la conservazione dei veicoli in assenza di immissioni o uscite dalla corrente principale. Questa relazione si può ricavare, così come si ricava in fluidodinamica, imponendo che la variazione del numero di automobili presenti in un tratto sia uguale alla differenza fra flusso in entrata e flusso in uscita.



Figura 4b: automobili entranti ed uscenti da un segmento di strada.

Su un tratto di strada, tra $x = a$ e $x = b$, nell'ipotesi che la densità sia continua, il numero di automobili N è dato dall'integrale della densità di traffico:

$$N = \int_a^b \rho(x, t) dx. \quad (3b)$$

Se non ci sono né immissioni né uscite sulla strada, il numero di automobili tra $x = a$ e $x = b$ rimane invariato. Tale numero può diminuire solo se delle automobili lasciano il tratto in $x = b$ e può aumentare come risultato dell'entrata di nuove automobili in $x = a$. Dunque, assumendo che le automobili non possano essere né create né distrutte tra $x = a$ e $x = b$, le variazioni nel numero di automobili possono essere dovute soltanto ad attraversamenti in $x = a$ e $x = b$.

La velocità con cui cambia il numero di automobili è uguale alla differenza tra il numero di attraversamenti per unità di tempo in $x = a$ (spostamenti verso destra) e il numero di attraversamenti (spostamenti ancora verso destra), in $x = b$, ovvero:

$$\frac{dN}{dt} = f(a, t) - f(b, t), \quad (4b)$$

dove il numero di automobili per unità di tempo è il flusso $f(x, t)$.

Combinando le equazioni (3b) e (4b), si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t). \quad (5b)$$

Questa equazione indica che i cambiamenti nel numero di automobili sono dovuti soltanto al flusso attraverso i bordi del tratto considerato.

L'equazione (5b) è detta **legge di conservazione integrale**. Essa esprime una proprietà del traffico su una lunghezza finita di strada, $a \leq x \leq b$.

La legge di conservazione integrale può essere espressa come legge di conservazione locale valida in ogni posizione della strada e, in tal caso, bisogna considerare gli estremi del segmento della strada, $x = a$ e $x = b$, come ulteriori variabili indipendenti. La derivata totale rispetto al tempo nell'equazione (5b) deve essere sostituita da una derivata parziale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \rho(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t). \quad (6b)$$

Osservando che

$$f(a, t) - f(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [f(x, t)] dx,$$

si ha

$$\int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right] dx = 0.$$

Da qui segue che, data l'arbitrarietà degli estremi di integrazione,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (7b)$$

Essendo $f = \rho v$, possiamo riscrivere la legge di conservazione nella forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (8b)$$

Il modello di Lightill e Whitham: formulazione analitica

L'analogia fluidodinamica è basata sulle due relazioni già viste :

$$f = \rho v; \quad (9b)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (10b)$$

che sono valide per le variabili macroscopiche del traffico così come nei fluidi, ma da sole non bastano a caratterizzare il flusso veicolare.

Se la velocità è nota, l'equazione (10b) si riduce ad una equazione differenziale alle derivate parziali per la densità di traffico incognita. In questo caso, essa può essere usata per prevedere la densità di traffico futura se è nota la densità di traffico iniziale. Per poter risolvere tale equazione, è indispensabile analizzare il campo velocità.

Molti sono gli studiosi che hanno investigato la relazione intercorrente fra densità e velocità e quindi molti sono i modelli a noi oggi noti.

Varie curve sono state proposte per rappresentare la funzione $v(\rho)$, ognuna di esse supportata da dati sperimentali, ma non è chiaro quale sia la curva alla quale dare più credito. Nella metà degli anni '50 Lightill e Whitham ([15]), ed indipendentemente Richards ([17]), svilupparono un modello basato sulle relazioni (9b) e (10b), ipotizzando che la velocità dipenda in ogni punto solo dalla densità $f = f(\rho)$, seguendo una qualsiasi funzione $f(\rho)$ tale che la velocità diminuisca all'aumentare della densità. In pratica, si ha che

$$\frac{dv}{d\rho} \leq 0.$$

Sotto questa ipotesi, il flusso f è funzione solo della densità: $f = f(\rho)$.

Secondo tale modello, se la densità di traffico è molto bassa, l'automobile viaggerà alla massima velocità $v_{\max}$,

$$v(0) = v_{\max},$$

velocità con cui si muoverebbero le automobili se fossero libere dall'interferenza di altri veicoli. All'aumentare della densità, la presenza di altre automobili rallenterà la velocità dell'automobile. Perciò:

$$\frac{dv}{d\rho} = v'(\rho) \leq 0.$$

Ad una certa densità, le automobili si fermano. Alla massima densità $\rho_{\max}$, si ha che

$$v(\rho_{\max}) = 0.$$

Si noti che le automobili si fermano in condizioni di traffico denso prima che si tocchino l'una con l'altra.

Una curva $v = v(\rho)$ ragionevole è del tipo rappresentato nel grafico che segue:

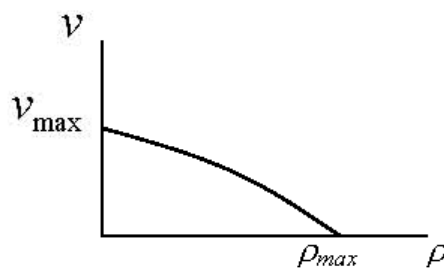


Figura 5b: andamento di $v = v(\rho)$.

Poiché $f = \rho v(\rho)$, in tale modello anche il flusso dipende solo dalla densità.

Il flusso ha alcune proprietà generali. Esso è nullo se non c'è traffico ($\rho = 0$), o se il traffico non si muove ($v = 0$ e $\rho = \rho_{\max}$).

Per $0 < \rho < \rho_{\max}$, il flusso del traffico deve essere positivo. In generale, la dipendenza del flusso di traffico dalla densità è del tipo descritto in Figura 6b.

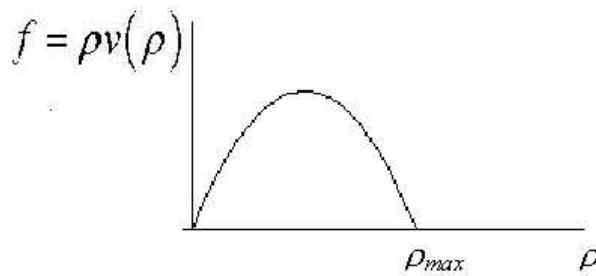


Figura 6b: fundamental Diagram of Road.

La Figura 6b mostra che un massimo di flusso di traffico si verifica per un certo valore di densità (corrispondente ad una certa velocità). Il massimo flusso di traffico prende il nome di **capacità** della strada.

Essendo il flusso funzione solo della densità ρ , si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\rho) = \frac{df}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

e quindi possiamo riscrivere la legge di conservazione nella forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) + \frac{d}{d\rho} q(\rho(x,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \rho(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) + C(\rho(x,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \rho(x,t) = 0, \quad (11b)$$

dove $C(\rho) = q'(\rho)$.

Questa è un'equazione differenziale alle derivate parziali quasi lineare di tipo iperbolico. Può quindi essere risolta con opportuni metodi.

Bibliografia

- [1] D. Alderson, H. Chang, M. Roughan, S. Uhlig and W. Willinger, The many facets of internet topology and traffic, *Networks and Heterogeneous Media (NHM)*, Vol. 1, Issue 4, (2007), pp. 569 – 600 .
- [2] D. Armbruster, P. Degond and C. Ringhofer, A Model for the Dynamics of large Queuing Networks and Supply Chains, *SIAM J. Applied Mathematics*, SIAP, Vol. 66, Issue 3, (2006), pp. 896 – 920.
- [3] F. Baccelli, D. Hong and Z. Liu, Fixed points methods for the simulation of the sharing of a local loop by large number of interacting TCP connections, Tech. Rep. RR-4154, INRIA, April 2001.
- [4] C. Bardos and A. Y. Le Roux and J. C. Nedelec, First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions, *Commun. Partial Differential Equations*, 4 (1979), pp. 1017 – 1034.
- [5] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws - The One-dimensional Cauchy Problem*, Oxford Univ. Press, 2000.
- [6] G. Coclite, M. Garavello, B. Piccoli, Traffic Flow on Road Networks, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 36 (2005), 1862 - 1886.
- [7] C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer-Verlag, 1999.
- [8] C. Daganzo, *Fundamentals of Transportation and Traffic Operations*, Pergamon-Elsevier, Oxford, 1997.
- [9] C. D'Apice, R. Manzo, B. Piccoli, Packets flow on telecommunication networks, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 38, n. 3, (2006), pp. 717--740.
- [10] M. Garavello and B. Piccoli, *Traffic flow on networks*, AIMS book series on Applied Mathematics, 2006.
- [11] M. Garavello, B. Piccoli, Source-Destination Flow on a Road Network, *Communications Mathematical Sciences* 3 (2005), pp. 261--283.
- [12] M. Herty and A. Klar, Modeling, simulation, and optimization of traffic flow networks, *SIAM J. Sci. Comput.*, 25 (2003), pp. 1066--1087.
- [13] H. Holden and N.H. Risebro, A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads, *SIAM J. Math. Anal.*, 26 (1995), pp. 999--1017.
- [14] F. Kelly, A.K. Maulloo and D.K.H. Tan, Rate control in communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability, *J. of the Operational Research Society*, 49 (1998), pp. 237 – 252.

- [15] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, On kinetic waves. II. Theory of Traffic Flows on Long Crowded Roads, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 229 (1955), pp. 317--345.
- [16] G.F. Newell, Traffic Flow on Transportation Networks, MIT Press, Cambridge (MA,USA), 1980.
- [17] P. I. Richards, Shock Waves on the Highway, Oper. Res., 4, (1956), pp. 42--51.
- [18] D. Serre, Systems of conservation laws I and II, Cambridge University Press, 1999.
- [19] A.S. Tanenbaum, Computer Networks, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2003.
- [20] W. Willinger and V. Paxson, Where Mathematics meets the Internet, Notices of the AMS, 45 (1998), pp. 961--970.